工程流体力学课程核心重点深度学习报告

> 基于用户提供的《流体力学课程核心重点梳理》整理。每章均由独立 deepseek-v4-flash 子 agent 形成章节草稿，再由主 agent 统一整合、审校与覆盖追踪。

使用说明

- 每章开头都有“**一页式：本章名词与公式解释**”，用于考前快速扫盲。
- 正文按“概念 → 公式 → 适用条件 → 易混点 → 题型模板”组织。
- 习题编号部分按用户给出的重点编号归纳为“同类型题解法”，不虚构原题。
- 若不同教材存在表述差异，报告中以“口径差异”标注。

覆盖审计结论

- 原始重点覆盖项：45 条。
- 已在章节草稿和最终报告中检出覆盖 ID：45 条。
- 缺失项：无。
- 详细追踪见 `docs/coverage-matrix.md`。

章节目录

9. 第8章 平面势流（源文件：`chapters/ch08.md`）
10. 第9章 绕流流动（源文件：`chapters/ch09.md`）

第1章 流体力学简介

一页式：本章名词与公式解释

核心名词

名词	英文	说明
流体	Fluid	在任何微小切应力作用下均能连续变形的物质
连续介质假设	Continuum Hypothesis	将流体视为由连续分布的质点组成，忽略分子间隙
密度	Density	单位体积流体的质量
重度	Specific Weight	单位体积流体的重量
比重（相对密度）	Specific Gravity	流体密度与4°C纯水密度之比（无量纲）
压缩性	Compressibility	流体在外压作用下体积缩小的性质
体积模量	Bulk Modulus	产生单位相对体积变化所需压强增量
黏性	Viscosity	流体抵抗剪切变形的性质
黏性切应力	Viscous Shear Stress	流体内部因黏性产生的平行于截面的应力
动力黏度	Dynamic Viscosity	度量流体黏性大小的物性参数
运动黏度	Kinematic Viscosity	动力黏度与密度之比
牛顿流体	Newtonian Fluid	切应力与切应变速率满足线性关系的流体
非牛顿流体	Non-Newtonian Fluid	切应力与切应变速率不满足线性关系的流体
理想流体	Ideal/Inviscid Fluid	黏度为零的假想流体
实际流体	Real/Viscous Fluid	具有黏性的真实流体
质量力	Body Force	作用于流体每一质点上、与质量成正比的力
表面力	Surface Force	作用于流体表面上、与表面积成正比的力

符号、单位与关键公式

符号	含义	SI 单位	量纲
ρ	密度	$\mathrm{kg/m^3}$	$\mathrm{ML^{-3}}$
γ	重度	$\mathrm{N/m^3}$	$\mathrm{ML^{-2}T^{-2}}$
S / sg	比重	无量纲	1
K	体积模量	Pa	$\mathrm{ML^{-1}T^{-2}}$
μ	动力黏度	$\mathrm{Pa{\cdot}s}$ (或 $\mathrm{N{\cdot}s/m^2}$)	$\mathrm{ML^{-1}T^{-1}}$
ν	运动黏度	$\mathrm{m^2/s}$	$\mathrm{L^2T^{-1}}$
τ	切应力	Pa	$\mathrm{ML^{-1}T^{-2}}$
$\dot{\gamma}$	切应变速率	$\mathrm{s^{-1}}$	$\mathrm{T^{-1}}$
g	重力加速度	$\mathrm{m/s^2}$	$\mathrm{LT^{-2}}$

公式清单：

1. **密度关系式**

$$\rho = \frac{m}{V}$$

2. **重度与密度关系**

$$\gamma = \rho g$$

3. **比重**

$$S = \frac{\rho_{\text{fluid}}}{\rho_{\text{water@4}^\circ\text{C}}}$$

（$\rho_{\text{water@4}^\circ\text{C}} \approx 1000\ \mathrm{kg/m^3}$）

4. **体积模量定义**

$$K = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V} = -V\frac{dp}{dV}$$

- K 大 → 不易压缩（如水 $K \approx 2.2\ \mathrm{GPa}$）
- 负号表示压强增大体积减小

5. **牛顿内摩擦定律（黏性切应力公式）**

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

- 适用条件：牛顿流体，一维平行剪切流动（层流）
- $\frac{du}{dy}$ 为速度梯度（法向速度变化率）

6. **动力黏度与运动黏度关系**

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

7. **切应力与切应变速率的一般关系（牛顿流体）**

$$\tau = \mu\dot{\gamma} = \mu \frac{du}{dy}$$

8. **质量力通用表达式**

$$\boldsymbol{f} = \lim_{V\to 0} \frac{\boldsymbol{F}_b}{\rho V}$$

单位质量力 $\boldsymbol{f}$。常见形式：重力场中 $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}$。

正文深度讲解

1.1 流体定义与流体-固体区别

流体定义： 流体是一种在任意微小切应力作用下都能发生连续变形的物质。流体不能承受拉力和静切应力；只要切应力存在（无论多小），流体就会持续变形（流动）。

与固体的本质区别：

比较维度	流体	固体
切应力响应	任何非零切应力都导致连续变形	可承受一定切应力而只产生有限变形
变形与应力的关系	变形速率与切应力相关（$\tau \propto du/dy$）	变形量（应变）与切应力相关（$\tau \propto G\gamma$）
平衡状态	静止时切应力为零	静止时可保留切应力
形状保持	无容器则不能保持固定形状	可保持固定形状

口径差异： 部分教材将"流体不能承受拉力"归为流体特征。严格说，流体实际上可以承受极小拉力（如液体分子间力），但工程计算中一般忽略，按不能受拉处理。

补充——连续介质假设： 流体力学的基本前提。它将流体视为由连续无间隙的质点组成，每个质点包含大量分子，宏观物理量（密度、压强、速度）是质点的统计平均值。该假设在分子平均自由程远小于问

题特征尺度时成立（如稀薄气体除外）。

1.2 量纲和单位

基本量纲（国际单位制 SI）：

物理量	量纲符号	SI 单位
长度	L	m
质量	M	kg
时间	T	s
温度	Θ	K

常用导出量纲：

物理量	量纲	SI 单位
速度	LT^{-1}	m/s
加速度	LT^{-2}	m/s^2
力	MLT^{-2}	N ($kg\cdot m/s^2$)
压强/应力	$ML^{-1}T^{-2}$	Pa (N/m^2)
密度	ML^{-3}	kg/m^3
重度	$ML^{-2}T^{-2}$	N/m^3
动力黏度	$ML^{-1}T^{-1}$	Pa·s
运动黏度	L^2T^{-1}	m^2/s
体积模量	$ML^{-1}T^{-2}$	Pa
能量/功	ML^2T^{-2}	J (N·m)
功率	ML^2T^{-3}	W (J/s)

量纲分析方法（将在第6章详述）：任何物理方程两端的量纲必须一致（量纲和谐原理）；利用量纲分析可导出无量纲参数，简化实验与理论分析。

1.3 密度、重度与比重

密度：

$$\rho = \frac{m}{V}$$

常见值（标准大气压，20°C 附近）：

- 水：$\rho \approx 998\ \mathrm{kg/m^3}$ （工程常取 $1000\ \mathrm{kg/m^3}$）
- 空气：$\rho \approx 1.205\ \mathrm{kg/m^3}$
- 汞：$\rho \approx 13546\ \mathrm{kg/m^3}$

重度（容重）：

$$\gamma = \rho g$$

- 水重度 $\gamma \approx 9800\ \mathrm{N/m^3}$ （工程常取 $9.8\ \mathrm{kN/m^3}$）
- 在某些教材中，重度符号用 w 或 γ 表示，单位有 $\mathrm{N/m^3}$ 或 $\mathrm{kN/m^3}$

比重（相对密度）：

$$S = \frac{\rho_{\text{fluid}}}{\rho_{\text{water@4}^\circ\text{C}}}$$

- 无量纲量
- 水的比重 = 1
- 比重常用于表征液体（对气体多用密度直接表达）

口径差异： 有些教材（尤其是英制教材）将比重定义为重度比而不是密度比，即 $S = \gamma_{\text{fluid}}/\gamma_{\text{water}}$。由于 $\gamma = \rho g$ 且在同一重力场下 g 抵消，两种定义数值相等，但概念基础不同。

1.4 压缩性与体积模量

压缩性： 流体在压强变化时体积（密度）发生变化的性质。液体压缩性很小（近似不可压），气体压缩性显著（可压缩流体）。

体积模量（体积弹性模量）：

$$K = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V} = -V\frac{dp}{dV}$$

物理含义： 压强增加 Δp 时，体积产生相对变化 $\Delta V/V$，两者的比值经负号处理后为正的物性参数。

典型值：

- 水：$K \approx 2.2 \times 10^9$ Pa（约 2.2 GPa）—— 不易压缩
- 空气：等温过程 $K = p$（约 10^5 Pa 量级），绝热过程 $K = \kappa p$

可压缩性系数（体积模量的倒数）：

$$\alpha = \frac{1}{K}$$

工程应用判断：

流体	是否可压缩处理	依据
水/油（常规工程）	不可压缩	压强变化小时体积变化可忽略
水（水锤/液压冲击）	需考虑压缩性	瞬时高压变化显著
气体（低速，马赫数 Ma < 0.3）	近似不可压缩	密度变化 < 5%
气体（高速，Ma ⩾ 0.3）	可压缩	密度变化不可忽略

1.5 黏性与黏性切应力

黏性的物理本质： 流体分子间的内聚力和分子动量交换所产生的内摩擦性质。

牛顿内摩擦定律（牛顿黏性定律）：

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

式中：

- τ：切应力（Pa），作用在平行于流动方向的平面上
- μ：动力黏度（Pa·s），物性参数，与流体种类和温度有关
- $\frac{du}{dy}$：速度梯度（s^{-1}），垂直于流动方向的速度变化率

物理图像： 两平行平板间充满流体，下板固定，上板以速度 U 匀速运动。板间速度呈线性分布 $u(y) = Uy/h$，则：

$$\tau = \mu \frac{U}{h}$$

温度对黏度的影响：

- 液体：温度升高，黏度**降低**（分子间内聚力减小为主导）
- 气体：温度升高，黏度**升高**（分子热运动动量交换增强为主导）

运动黏度：

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

单位为 m^2/s。工程中还常用 St（斯托克斯，1 St = 10^{-4} m^2/s）及 cSt（1 cSt = 10^{-6} m^2/s）。

口径差异： 牛顿内摩擦定律的一种常见等效写法为 $\tau = \mu\frac{d\theta}{dt}$，其中 $\frac{d\theta}{dt}$ 为切应变速率。在一维剪切流中，$\frac{d\theta}{dt} = \frac{du}{dy}$，二者等价。

1.6 理想流体与实际流体

类型	定义	特点	使用场景
理想流体	$\mu = 0$，无黏性	流动中无摩擦损失；不产生黏性切应力	势流理论、无黏流分析（简化计算）
实际流体	$\mu > 0$，有黏性	流动中存在内摩擦；边界层、分离、阻力均与黏性有关	工程中几乎所有真实流动

理想流体模型的工程意义： 虽然真实流体都有黏性，但在黏性效应可忽略的区域（如远离壁面的大尺度流动、高雷诺数流动的主流区），可用理想流体模型简化分析。边界层内则必须考虑黏性。

口径差异： 部分教材将"理想流体"定义为不可压缩、无黏性的流体；有些定义为只无黏性、是否可压缩不论。国内工程流体力学教材多数倾向后者（只要求无黏性）。

1.7 黏度求解——通用解题套路（习题1.6、1.8类型）

典型题型特征： 已知平板运动速度 U、间隙 h、板面积 A，求所需拉力 F 或黏度 μ。

通用解题模板（三步法）：

步骤①：确定速度梯度

两平行平板间线性分布时：

$$\frac{du}{dy} = \frac{U}{h}$$

步骤②：应用牛顿内摩擦定律求切应力

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{U}{h}$$

步骤③：由切应力积分求总摩擦力/拉力

$$F = \tau \cdot A = \mu \frac{U}{h} A$$

由此可反求 $\mu = \frac{Fh}{UA}$。

常见变形题型：

1. **圆筒/旋转黏度计（Couette 流动）：**
   - 内筒旋转，外筒固定，间隙 $h \ll R$
   - 速度梯度近似 $\frac{du}{dy} \approx \frac{\omega R}{h}$
   - 扭矩 $T = \tau \cdot A \cdot R$，力矩平衡求 μ 或 F
2. **倾斜平板上的液膜流动：**
   - 重力驱动，自由表面 $\frac{du}{dy} = 0$
   - 需结合力平衡求解速度分布，再由 $\tau = \mu du/dy$ 求解
3. **滑动轴承（习题1.8常见背景）：**
   - 轴与轴承之间的环形间隙
   - 速度梯度 $\frac{du}{dy} = \frac{U}{\delta}$，$\delta$ 为径向间隙
   - 摩擦转矩 $M = \tau \cdot (\pi d L) \cdot \frac{d}{2}$

关键注意事项：

- 单位换算：间隙用 m，速度用 m/s，力用 N，面积用 m^2
- $1\ Pa{\cdot}s = 1\ N{\cdot}s/m^2 = 1000\ cP$（厘泊）
- 运动黏度 $1\ m^2/s = 10^6\ cSt$（厘斯）
- 注意区分动力黏度 μ 和运动黏度 ν，不要混淆

1.8 牛顿流体与非牛顿流体

牛顿流体： 切应力与切应变速率成正比（线性关系），μ 为常数（温度和压力一定时）。

- 例：水、空气、大部分纯净液体、低分子量气体

非牛顿流体： 切应力与切应变速率呈非线性关系。

非牛顿流体分类：

类型	τ—$\dot{\gamma}$ 关系特征	示意图说明	常见例子
宾汉流体（Bingham Plastic）	存在屈服应力 τ_0，超过后才流动；$\tau = \tau_0 + \mu_p \dot{\gamma}$	曲线有截距	牙膏、泥浆、油漆
假塑性流体（Shear-Thinning）	表现黏度随 $\dot{\gamma}$ 增大而减小	曲线向下弯曲	血液、聚合物溶液
胀流性流体（Shear-Thickening）	表现黏度随 $\dot{\gamma}$ 增大而增大	曲线向上弯曲	淀粉悬浊液、浓悬浮液
触变性流体（Thixotropic）	等剪切下黏度随时间减小	时间相关	某些涂料、钻井液
震凝性流体（Rheopectic）	等剪切下黏度随时间增大	时间相关	某些浓悬浮液

幂律模型（描述假塑性和胀流性流体的常用模型）：

$$\tau = k\dot{\gamma}^n$$

- $n < 1$：假塑性（剪切稀化）
- $n = 1$：牛顿流体
- $n > 1$：胀流性（剪切稠化）
- k：稠度系数（单位 Pa·s^n）

1.9 作用在流体上的力的分类

流体所受的力按作用方式分为两大类：

1.9.1 质量力（体积力）

- **定义：** 作用于流体每个质点上，大小与流体质量成正比
- **特点：** 远程力，无需接触即可传递
- **单位质量力：** $\boldsymbol{f} = \lim_{V\to 0} \frac{\boldsymbol{F}_b}{\rho V}$，量纲 LT^{-2}
- **常见质量力：**

- 重力：$\boldsymbol{F}_g = m\boldsymbol{g}$，单位质量重力 $\boldsymbol{g}$
- 惯性力（非惯性系）：离心力 $\boldsymbol{F}_c = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$，科里奥利力等
- 电磁力（导电流体在电磁场中）

1.9.2 表面力

- **定义：** 作用在流体团边界面上，大小与表面积成正比
- **特点：** 接触力，由相邻流体或固体壁面施加
- **分类：**
  - **法向应力（正应力）：** 垂直于作用面
    - 流体静压强即法向应力（静止流体中，切应力为零）
  - **切向应力（切应力）：** 平行于作用面
    - 流动流体中因黏性而产生

应力张量符号： 作用在微元体上的应力状态用二阶张量表示:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

在流体力学中，通常将法向应力写为 $\sigma_{ii} = -p + \tau'_{ii}$（静压部分+黏性法向应力部分）。

易混点与常考点

易混点辨析

易混对	混淆来源	辨析要点
重度 γ vs 密度 ρ	都表征"单位体积"的物量	$\gamma=\rho g$，重度是重量（力），密度是质量；单位也不同（$\mathrm{N/m^3}$ vs $\mathrm{kg/m^3}$）
动力黏度 μ vs 运动黏度 ν	都叫"黏度"，符号易混	$\nu=\mu/\rho$；动力黏度与剪切应力直接相关，运动黏度出现在惯性效应与黏性效应的比值中（Re数 = UL/ν）
压缩性 vs 体积模量	互为倒数概念	压缩性大 → 体积模量小；描述可压缩程度用 K 大表示不易压
理想流体 vs 实际流体	题目可能设置陷阱	理想流体是无黏流体（$\mu=0$），不等于不可压缩流体——无黏可压缩在理论上也是理想流体的一种
牛顿流体 vs 非牛顿流体	误以为所有流体都是牛顿的	水的确是牛顿流体，但牙膏、血液不是。判断标准：τ 与 du/dy 是否呈线性
质量力 vs 表面力	混淆静力学中的压强与重力	重力是质量力（作用在全部质点上），压强是表面力（作用在边界面上）

常考点

1. **给出间隙、速度、面积求黏度/拉力**——直接套 $\tau=\mu\frac{du}{dy}$，$F=\tau A$
2. **温度变化对黏度的影响（液体 vs 气体对比）**——液体降、气体升
3. **指出哪类力是质量力、哪类是表面力**——重力、惯性力=质量力；压力、摩擦力=表面力
4. **体积模量的计算**——给定 Δp 和 $\Delta V/V$ 求 K
5. **流体与固体的区别论述题**——注意从"切应力响应方式"角度回答
6. **比重与密度的换算**——给出比重求密度 $\rho=S\times 1000\ \mathrm{kg/m^3}$

典型题解题模板

模板1：两平板间黏性流动求力/黏度

> **题目模型：** 两平行平板间距 h，下板固定，上板以速度 U 移动，板面积 A，板间充满动力黏度 μ 的牛顿流体，求维持上板运动所需拉力 F。

解析：

1. 假定板间速度线性分布：$\frac{du}{dy} = \frac{U}{h}$
2. 牛顿内摩擦定律：$\tau = \mu \frac{U}{h}$
3. 总力：$F = \tau A = \frac{\mu U A}{h}$

反求黏度： 若已知 F、U、A、h，则 $\mu = \frac{Fh}{UA}$。

模板2：旋转黏度计

> **题目模型：** 内筒直径 d，高度 L，筒间间隙 δ，内筒转速 n（r/min），测得的扭矩为 M，求流体黏度。

解析：

1. 线速度：$U = \pi dn/60$（m/s）
2. 速度梯度：$\frac{du}{dy} \approx \frac{U}{\delta}$（$\delta \ll d$ 时）
3. 切应力：$\tau = \mu \frac{U}{\delta}$
4. 摩擦面积：$A = \pi dL$
5. 力矩：$M = \tau A \cdot \frac{d}{2} = \mu \frac{U}{\delta} \cdot \pi dL \cdot \frac{d}{2}$
6. 解得：$\mu = \frac{2M\delta}{\pi d^2 LU}$

模板3：气体压缩性判断

> **题目模型：** 气体在管道中流动，判断是否可按不可压缩处理。

解析：

1. 计算马赫数 $\mathrm{Ma} = \frac{V}{c}$，其中 $c = \sqrt{\kappa RT}$
2. $\mathrm{Ma} < 0.3$：密度变化 < 5%，可按不可压缩处理
3. $\mathrm{Ma} \geq 0.3$：必须考虑压缩性

本章覆盖清单

覆盖 ID	原始重点	在本章位置	说明
1-01	流体定义；流体与固体区别	§1.1	含对比表格和连续介质假设补充
1-02	量纲和单位；常用物理量量纲	§1.2	含基本量纲表和常用导出量纲表
1-03	密度、重度、比重	§1.3	含定义、典型数值、公式与口径差异说明
1-04	压缩性与体积模量	§1.4	含定义、物理含义、典型值、可压缩性判断表
1-05	黏性、黏性切应力	§1.5	含牛顿内摩擦定律、温度影响、运动黏度
1-06	理想流体、实际流体	§1.6	含对比表及理想流体的工程意义
1-07	流体黏度求解，习题1.6/1.8类型	§1.7	含三步法通用模板及三种变形题型
1-08	牛顿流体与非牛顿流体	§1.8	含分类表、幂律模型、典型例子
1-09	作用在流体上的力的分类	§1.9	含质量力/表面力定义、分类、应力张量简介

本章参考资料：

- 教材原始重点 source/original-focus.md 第1章条目
- 工程流体力学教材（归柯庭等编）第1章——流体物理性质
- 牛顿内摩擦定律、体积模量定义——维基百科/公开教材口径交叉验证
- 非牛顿流体分类——常见工程流体力学教材统一口径

撰稿时间：2026-07-03 撰稿模型：na/deepseek-v4-flash

第2章 流体静力学（Fluid Statics / Hydrostatics）

一页式：本章名词与公式解释

核心名词

术语	英文	定义 / 说明
静压强	Static pressure / Hydrostatic pressure	静止流体中作用在某点单位面积上的法向压力。符号 p，单位 Pa（N/m^2）。
绝对压强	Absolute pressure	以完全真空（绝对零压）为基准计量的压强。p_{abs}
表压（相对压强）	Gauge pressure	以当地大气压 p_a 为基准计量的压强。$p_{\text{g}} = p_{\text{abs}} - p_a$
真空度	Vacuum pressure	当绝对压强低于大气压时，$p_{\text{v}} = p_a - p_{\text{abs}}$
重度 γ	Specific weight	单位体积流体所受重力。$\gamma = \rho g$，单位 N/m^3。
密度 ρ	Density	单位体积流体的质量。单位 kg/m^3。
液柱高度 h	Liquid column height	液柱产生的压强等效于同高密度流体的压强：$p = \gamma h$。
等压面	Isobaric surface	静止流体中压强相等的点构成的面。性质：水平面即等压面（重力场中静止同种连续流体）。
压力体	Pressure prism / Pressure diagram	用于计算曲面上的流体总压力的体积概念。
浮力	Buoyancy	浸没在流体中的物体受到流体对其向上的总压力。
浮心	Center of buoyancy	物体排开流体体积的形心（浮力作用点）。符号 B 或 C。
重心	Center of gravity	物体重力的作用点。符号 G。
稳心	Metacenter	浮体小角度倾斜后，浮力作用线与原浮力作用线（通过浮心竖直线）的交点。符号 M。
稳性高度	Metacentric height	重心 G 到稳心 M 的距离，$\overline{GM}$。正稳性高度 → 稳定。
复原力矩	Restoring moment / Righting moment	倾斜浮体上重力与浮力形成的使浮体回复原位的力矩。
帕斯卡原理	Pascal’s law	施加在静止流体上的压强，以等值传递到流体各点。

核心公式一览

公式	名称	适用条件
$p=\dfrac{F}{A}$	压强定义式	法向力均匀作用于面积 A
$p=p_0+\gamma h$	流体静力学基本方程	重力场中静止均质流体，h 为液面下深度
$p=p_0+\rho gh$	同上（$\gamma=\rho g$）	同上
$\dfrac{p}{\gamma}+z=$ 常数	静力学基本方程（水头形式）	重力场中静止均质流体，z 为位置高度
$\dfrac{p_1}{\gamma}+z_1=\dfrac{p_2}{\gamma}+z_2$	两点间关系	同上
$p_A-p_B=\gamma(h_B-h_A)$	两点压差（同种流体）	同种静止流体
$p_A-p_B=(\gamma_2-\gamma_1)\Delta h$	U 形管测压差	两种不同流体
$F_b=\rho gV_{排}$	阿基米德浮力定律	物体浸没或漂浮在流体中
$M_r=\rho gV_{排}\cdot\overline{GM}\cdot\theta$	复原力矩（小角度）	θ 为小倾角，$\overline{GM}>0$ 稳定
$\overline{GM}=\dfrac{I}{V_{排}}-\overline{BG}$	稳性高度公式	I 为水线面惯性矩，$\overline{BG}$ 为浮心至重心距离

正文：深度讲解

2.1 静止流体静压强的两个特性

特性一（方向性）： 静止流体中，静压强的方向总是沿作用面的**内法线方向**。

> 证明思路：反证法。若静压强有切向分量，则流体必在切向力作用下发生流动，与"静止"矛盾。若压强方向沿外法线，则流体受拉力（流体不能承受拉应力），同样不可能静止。→ 静压强只能垂直于作用面且指向内法线方向。

特性二（各向等值性）： 平衡流体中，任意一点的静压强大小与作用面的方位无关，即各个方向的静压强大小相等。

> 证明思路：在流场中取微元四面体（如图 2-1），三个面分别垂直于 x,y,z 轴，斜面任意取向。列 x,y,z 方向的力平衡方程。当四面体趋近于一点（$dx,dy,dz\to0$）时，质量力项（体积力）为高阶小量，得到 $p_x=p_y=p_z=p_n$，即各方向压强相等。

特性总结： 静止流体的静压强是一个**标量场**（无方向性），但该标量通过法向力作用于任意表面，方向恒指向内法线。

2.2 流体静力学基本方程

2.2.1 欧拉平衡微分方程（预备知识）

在静止流体中取微元六面体 $dx\,dy\,dz$，考虑 x 方向的力平衡：

- 表面力：$(p|_x - p|_{x+dx})\,dy\,dz = -\dfrac{\partial p}{\partial x}dx\,dy\,dz$
- 质量力：$\rho f_x\,dx\,dy\,dz$（f_x 为单位质量力在 x 分量）

平衡条件：

$$-\frac{\partial p}{\partial x}dx\,dy\,dz + \rho f_x\,dx\,dy\,dz = 0$$

推广到三个方向，得**欧拉平衡微分方程**：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = \rho f_x \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = \rho f_y \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} = \rho f_z \end{cases}$$

或写成矢量形式：

$$\nabla p = \rho \boldsymbol{f}$$

> 物理意义：静止流体中，压强的梯度等于密度与单位质量力的乘积。

2.2.2 静力学基本方程推导（仅重力作用）

仅考虑重力场，取 z 轴铅直向上为正，则：

$$f_x = 0, \quad f_y = 0, \quad f_z = -g$$

代入欧拉平衡方程：

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g = -\gamma$$

前两式表明 p 只与 z 有关。由第三式：

$$\frac{dp}{dz} = -\gamma \quad \Rightarrow \quad \int_{p_0}^{p} dp = -\int_{z_0}^{z} \gamma \, dz$$

对不可压缩均质流体（$\gamma =$ 常数）:

$$p - p_0 = -\gamma(z - z_0)$$

通常取 z_0 为自由液面，此时 p_0 为液面压强（通常为大气压），且以液面下深度 $h = z_0 - z$ 表示（注意 z 向下为正的深度坐标），得**流体静力学基本方程**:

$$\boxed{p = p_0 + \gamma h}$$

或

$$\boxed{p = p_0 + \rho g h}$$

2.2.3 水头形式

将 $p = p_0 + \gamma h$ 变形为:

$$\frac{p}{\gamma} + z = \frac{p_0}{\gamma} + z_0 = \text{常数}$$

即

$$\boxed{\frac{p}{\gamma} + z = C}$$

其中:

- $\frac{p}{\gamma}$ —— **压强水头**（pressure head），单位 m；
- z —— **位置水头**（elevation head / potential head），单位 m；
- $\frac{p}{\gamma} + z$ —— **测压管水头**（piezometric head），常数。

> **物理意义：** 静止流体中各点的测压管水头相等。这是连通器原理、U 形管测压等应用的数学基础。

2.2.4 适用范围与条件

条件	说明
重力场	质量力仅为重力
静止	流体无相对运动
均质不可压缩	$\gamma =$ 常数
同种连续流体	连通器原理要求同种流体连通

> 对**可压缩流体（气体）** 在高度差较大时，γ 随高度变化，需使用积分形式 $p = p_0 \exp\left(-\frac{g}{RT}z\right)$（等温大气公式）。

2.2.5 例题与习题解法

例题 2.4 类型 — 求静压强

基本模式： 已知自由液面压强 p_0、流体重度 γ、深度 h，求某点压强。

解法： 直接代入 $p = p_0 + \gamma h$。注意区分绝对压强和相对压强。

> 例：水箱水深 3 m，液面大气压 $p_a = 101.3\,\mathrm{kPa}$，水 $\gamma = 9.8\,\mathrm{kN/m^3}$，求池底相对压强和绝对压强。
>
> **解：** $p_g = \gamma h = 9.8 \times 3 = 29.4\,\mathrm{kPa}$（表压） $p_{\text{abs}} = p_a + \gamma h = 101.3 + 29.4 = 130.7\,\mathrm{kPa}$

例题 2.5 类型 — 测压计／压差计算

基本模式： 使用 U 形管测压计或压差计测量压强/压差。

关键原则： 从已知压强点出发，沿连通器逐段推算，同种静止液体中等高面为等压面。

> **例：** U 形管水银压差计，一端接水箱 A，一端通大气，水银柱高差 $\Delta h = 0.2\,\mathrm{m}$，求 A 点表压。($\gamma_{\text{Hg}} = 133.4\,\mathrm{kN/m^3}$)
>
> **解：** 取水银与空气接触的自由面为等压面参考，得 $p_A + \gamma_{\text{水}} h_{\text{水}} = \gamma_{\text{Hg}} \Delta h$ 代入数据求解 p_A。

习题 2.5 类型 — 多液柱系统

多层不同液体叠加的容器中的压强分布。逐层使用 $p_{i+1} = p_i + \gamma_i \Delta h_i$。

习题 2.6 类型 — 连通器/液面差

连通器两端液面差的求解。利用等压面，建立两端压强相等的关系式，解出高度差。

习题 2.7 类型 — 综合压差计算

可能涉及倾斜管测压计（微压计），利用倾角放大液柱差读数：

$$\Delta p = \gamma L \sin\alpha$$

其中 L 为沿倾斜管的读数长度，α 为倾角。

2.3 等压面

定义： 静止流体中压强相等的各点组成的面。

等压面的性质：

1. 等压面与质量力方向**正交**（在重力场中等压面为水平面）；
2. 静止、同种、连通的液体中，水平面即为等压面；
3. 不同液体的分界面也是等压面。

> **使用注意事项：** 等压面条件——静止、同种、连续。缺一不可。如果中间有阀门关闭或气体隔断，不能盲目使用。

2.4 压力体与静水总压力

2.4.1 平面壁上的静水总压力

- 大小：$F = p_c A$，p_c 为形心处压强
- 作用点（压力中心）：$y_D = y_c + \dfrac{I_c}{y_c A}$

2.4.2 曲面壁上的静水总压力

水平分力 F_x = 该曲面的垂直投影面上的总压力 垂直分力 $F_z = \gamma \cdot V_{压力体}$（压力体：液面到曲面之间的柱体体积）

2.5 浮力与稳定性

2.5.1 阿基米德原理

浸没在流体中的物体受到垂直向上的浮力，大小等于物体所排开流体的重量：

$$\boxed{F_b = \rho g V_{排}}$$

其中 $V_{排}$ 为物体浸没部分的体积。

浮心： 排开流体体积的形心即为浮力作用点，记为 B。

- 完全浸没物体：浮心即为物体的几何形心（均质时）；
- 漂浮物体：浮心为水面以下那部分体积的形心。

2.5.2 浮体的平衡

浮体平衡条件：

1. 重力与浮力大小相等：$W = F_b$
2. 重心 G 与浮心 B 在同一铅垂线上

2.5.3 稳定性判据

完全浸没物体（潜体）：

- G 在 B 之下 → **稳定**（重心低于浮心）
- G 在 B 之上 → **不稳定**
- G 与 B 重合 → **随遇平衡**

漂浮物体（浮体）： 对于船舶等漂浮物，稳定性不仅取决于 G 和 B 的相对位置，还取决于**稳心** M。

小角度倾斜后：

- 浮心从 B 移动到 B'
- 新浮力作用线交原浮力作用线于 M（稳心）
- M 到 G 的距离 $\overline{GM}$ 称为**稳性高度（metacentric height）**

判据：

- $\overline{GM} > 0$（M 在 G 之上）→ **稳定平衡**，有复原力矩
- $\overline{GM} < 0$（M 在 G 之下）→ **不稳定平衡**
- $\overline{GM} = 0$ → **随遇平衡**

稳性高度计算公式：

$$\overline{GM} = \frac{I}{V_{排}} - \overline{BG}$$

其中：

- I —— 水线面面积绕倾斜轴的惯性矩
- $V_{排}$ —— 排水体积
- $\overline{BG}$ —— 浮心到重心的距离（G 在 B 上为正）

2.5.4 复原力矩

当浮体倾斜小角度 θ 时，复原力矩（righting moment）为：

$$M_r = \rho g V_{排} \cdot \overline{GM} \cdot \sin\theta \quad (\text{小角度近似：} M_r \approx \rho g V_{排} \cdot \overline{GM} \cdot \theta)$$

复原力矩越大，浮体抵抗倾斜的能力越强。船舶设计时需要合理的 $\overline{GM}$——过小则不安全，过大则摇摆周期短、乘坐不舒适。

易混点、常考点与典型题解题模板

易混点对比

概念	易混对象	区分要点
绝对压强 vs 表压	p_{abs} 与 p_g	基准不同：真空基准 vs 大气压基准
真空度 vs 表压	p_v 与 p_g	真空度 = $p_a - p_{\text{abs}}$（正值），表压 = $p_{\text{abs}} - p_a$
等压面 vs 水平面	两者不等同	等压面条件：静止、同种、连续；水平面不一定是等压面（如不同液体界面）
浮心 vs 重心	B 与 G	浮心 = 排开流体形心；重心 = 物体自身重力作用点
稳心 vs 浮心	M 与 B	稳心是小角度倾斜后浮力线的交点；浮心是排开体积的形心
潜体稳定性 vs 浮体稳定性	—	潜体看 $G-B$ 位置；浮体看 $\overline{GM}$

常考点

1. 静压强的两个特性描述（简答题）
2. $p = p_0 + \gamma h$ 的应用计算（给出液面下深度求压强，或给出压强求深度）
3. U 形管测压计读数换算（多段不同流体逐层推算）

4. 连通器两端液面差计算
5. 静水总压力计算（平面壁/曲面壁）
6. 浮体稳定性判断（G、B、M 三者位置关系）
7. 稳性高度 $\overline{GM}$ 的计算

典型题解题模板

模板 1：求某点静压强

```
1. 明确基准（绝对/相对/真空度）
2. 确定深度 h（从自由液面到计算点的竖直距离）
3. 代入 p = p₀ + γh
4. 如需换算：表压 = 绝对压 - 大气压；真空度 = 大气压 - 绝对压
```

模板 2：U 形管/多液柱压力计算

```
1. 选择起始点（通常是已知压强点或通大气面）
2. 沿连通器逐段推算，每段叠加 ρgΔh
3. 同种静止液体中等高面作为等压面参考
4. 列方程解未知数
```

模板 3：浮体稳定性判断

```
1. 确定重心 G、浮心 B 的位置
2. 计算水线面惯性矩 I
3. 计算稳心 M 的位置（GM = I/V_d - BG）
4. 判断：GM > 0 → 稳定；GM < 0 → 不稳定
```

本章覆盖清单

覆盖 ID	原始重点	位置
2-01	静压强两个特性	§2.1 静止流体静压强的两个特性（含证明思路、特性总结）
2-02	静力学基本方程 $p = p_0 + \gamma h$, 例题/习题类型	§2.2 全节（含欧拉平衡微分方程、推导、水头形式、适用条件、例题 2.4/2.5 解法、习题 2.5/2.6/2.7 解法）
2-03	浮力与稳定性	§2.5 浮力与稳定性（含阿基米德原理、浮心、潜体/浮体稳定性判据、稳性高度、复原力矩）

辅助覆盖：

- 等压面 → §2.3
- 压强单位与换算 → §一页式 名词表 + §2.2.4
- 压力体与静水总压力 → §2.4
- 易混点/常考点/解题模板 → §易混点、常考点与典型题解题模板

主要参考资料与依据

1. **White, F. M.**, *Fluid Mechanics*, 8th ed., McGraw-Hill, 2016. — Chapter 2: Pressure Distribution in a Fluid. 静压强特性、静力学基本方程、浮力与稳性标准理论来源。
2. **Fox, R. W., McDonald, A. T., Pritchard, P. J.**, *Introduction to Fluid Mechanics*, 8th ed., Wiley, 2011. — Chapter 3: Fluid Statics.
3. **Cengel, Y. A., Cimbala, J. M.**, *Fluid Mechanics: Fundamentals and Applications*, 4th ed., McGraw-Hill, 2018. — Chapter 3: Pressure and Fluid Statics.
4. **讲义/考试重点材料**：提供的《流体力学课程核心重点梳理》第2章要点。
5. **网上公开资料参考**：CSDN 及百度百科相关词条（流体静力学、静力学基本方程、浮体稳定性等），用于中国教材口径核对与表述方式参考。
6. **教材典型例题与习题分类**：基于常见工科流体力学教材（如水力学、工程流体力学）中例题 2.4/2.5、习题 2.5/2.6/2.7 的通用类型归纳。

> **注：** 各教材中对例题/习题编号可能不同。本报告按核心重点中提到的编号归纳解法类型，适用于国内多数《工程流体力学》教材（如莫乃榕、伍悦滨等版本）。

本章初稿完成日期：2026-07-03

第3章（一） 流体运动学：描述方法与流动特性

一页式：本章名词与公式解释

核心名词

术语	英文	解释
拉格朗日法	Lagrangian description	以单个流体质点为研究对象，追踪其运动轨迹和物理量变化，再推广至整个流场。相当于给每个质点贴标签。
欧拉法	Eulerian description	以空间固定点为研究对象，考察不同时刻经过该点的流体质点的物理量变化。相当于在流场中布置"观察站"。
流场	flow field	流体运动所占据的全部空间区域。
速度场	velocity field	流场中每一点对应一个速度矢量 $\boldsymbol{V}(x, y, z, t)$，形成矢量场。
一维流动	one-dimensional flow	流动参数仅沿一个空间坐标变化。
二维流动	two-dimensional flow	流动参数沿两个空间坐标变化，第三个方向可忽略。
三维流动	three-dimensional flow	流动参数是三个空间坐标的函数。
定常流动	steady flow	流场中各点的物理量不随时间变化：$\partial(\cdot)/\partial t = 0$。
非定常流动	unsteady flow	流场中至少一个物理量随时间变化：$\partial(\cdot)/\partial t \neq 0$。
迹线	path line	同一流体质点在连续时间内的运动轨迹。拉格朗日法的直接产物。
流线	streamline	某一瞬时流场中的一条曲线，曲线上每一点的切线方向与该点的速度方向一致。欧拉法的直接产物。
驻点 / 滞点	stagnation point	流场中速度 $
奇点	singularity	流场中速度趋于无穷大或物理量不连续的点（如源点、汇点、涡点）。
物质导数	material derivative / substantial derivative	跟随流体质点的物理量随时间的变化率，是联系拉格朗日与欧拉观点的纽带。
局部加速度	local acceleration	$\partial \boldsymbol{V} / \partial t$：固定空间点上速度随时间的变化率。
对流加速度	convective acceleration	$(\boldsymbol{V} \cdot \nabla)\boldsymbol{V}$：流体质点运动到不同位置引起的速度变化率。

核心公式

1. **物质导数定义式**

$$\frac{\mathrm{D}(\cdot)}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla(\cdot) \tag{3a.1}$$

2. **加速度展开式**（三维直角坐标） $$ \boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}
    - u\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial x}
    - v\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial y}
    - w\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial z} \tag{3a.2} $$

3. **加速度各分量**

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \\ a_y &= \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} \\ a_z &= \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \tag{3a.3}$$

4. **迹线微分方程**

$$\frac{\mathrm{d}x}{u} = \frac{\mathrm{d}y}{v} = \frac{\mathrm{d}z}{w} = \mathrm{d}t \tag{3a.4}$$

式中 t 为自变量，x, y, z 为 t 的函数。

5. **流线微分方程**

$$\frac{\mathrm{d}x}{u(x,y,z,t_0)} = \frac{\mathrm{d}y}{v(x,y,z,t_0)} = \frac{\mathrm{d}z}{w(x,y,z,t_0)} \tag{3a.5}$$

式中 t_0 为固定时间参量，积分时把 t_0 视作常数。

正文深度讲解

3a.1 描述流体运动的两种方法：拉格朗日法与欧拉法

3a.1.1 拉格朗日法（质点追踪法）

基本思想：将连续介质离散为无数流体质点，追踪每个质点的运动历程，再将个体结果综合为整体运动规律。

数学描述：以初始时刻 $t = t_0$ 时质点的坐标 (a, b, c) 作为标记（拉格朗日变数），任一质点的位置可写为：

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(a, b, c, t)$$

速度与加速度则为：

$$\boldsymbol{V}(a, b, c, t) = \left.\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}\right|_{(a,b,c)} \quad \boldsymbol{a}(a, b, c, t) = \left.\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial t^2}\right|_{(a,b,c)}$$

优点：物理概念直观，直接给出质点运动轨迹。**缺点**：①流场中质点数量巨大，追踪计算量无法承受；②难以用实验手段同时观测大量质点的完整轨迹；③工程中通常关心的是空间固定点的流动参数（如管道截面上的速度分布），而非特定质点的历史。

3a.1.2 欧拉法（空间点法）

基本思想：着眼于空间固定点，描述不同时刻经过该点的流体质点所具有的物理量（速度、压力、密度等），从而构成整个流场。

数学描述：

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(x, y, z, t) \quad p = p(x, y, z, t) \quad \rho = \rho(x, y, z, t)$$

其中 (x, y, z) 是空间坐标（欧拉变数），t 是时间。

优点：①数学处理相对简单，计算量小；②与工程实际中对固定断面物理量的测量一致；③是目前流体力学中最主流的方法。

优点：①当前空间点的物理量是不断更新的流体质点贡献的，因此无法直接得到单个质点的历史路径；②需要借助物质导数来获得质点层面的信息。

3a.1.3 两种方法的联系——物质导数

$$\frac{\mathrm{D}(\cdot)}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla(\cdot)$$

- $\partial(\cdot)/\partial t$ 是**局部（当地）变化率**：固定空间点上的时间导数，反映非定常性。

- $\boldsymbol{V} \cdot \nabla(\cdot)$ 是**对流（迁移）变化率**：质点移动到不同位置引起的变化，反映流场非均匀性。

> 通俗理解：登山者感受到气温变化（物质导数）来自两方面——①原地气温随时间变化（局部导数，如太阳下山），②攀登导致海拔变化引起气温变化（对流导数）。

3a.2 流动分类

3a.2.1 按空间维数分类

类别	定义	举例
一维流动	速度等物理量仅沿一个坐标方向变化	细长管道内的流动（忽略径向变化）
二维流动	物理量是两个空间坐标的函数，第三个方向均匀或视为均匀	宽浅明渠流动、绕无限长机翼的流动
三维流动	物理量是三个空间坐标的函数	大部分实际流动（弯管、绕汽车）

> **注意**：一维/二维是理想化模型。实际严格的三维流动非常复杂，工程中常通过"平均化"或"对称性假设"降低维数。

3a.2.2 按时间特性分类

类别	定义	数学条件	举例
定常流动	所有流动参数与时间无关	$\partial(\cdot)/\partial t = 0$	稳定工况下的水泵管路
非定常流动	至少一个参数与时间有关	$\partial(\cdot)/\partial t \neq 0$	水击、启停过程、波浪

> **易混淆点**：定常 $\neq$ 均匀。定常指时间不变，均匀指空间不变。定常非均匀流（如收缩管中的定常流动）是最常见的情形。

3a.2.3 其他常见分类

- **均匀流 vs 非均匀流**：速度梯度是否为零。
- **有压流 vs 无压流**：是否有自由液面。
- **层流 vs 湍流**：由雷诺数 Re 判别（第7章详解）。
- **可压缩流 vs 不可压缩流**：密度是否变化（$\mathrm{D}\rho/\mathrm{D}t = 0$ 为不可压缩，第5章详解）。

3a.3 迹线与流线

3a.3.1 迹线（Path Line）

定义：同一流体质点在不同时刻的空间位置连成的曲线。

数学方程（拉格朗日视角）：

$$\frac{\mathrm{d}x}{u} = \frac{\mathrm{d}y}{v} = \frac{\mathrm{d}z}{w} = \mathrm{d}t$$

积分时 x, y, z 均为 t 的函数，需由初始条件 (x_0, y_0, z_0) 确定积分常数。

物理意义：若向流场中投放一个示踪粒子并长时间曝光拍摄，得到的轨迹即为迹线。

3a.3.2 流线（Streamline）

定义：某一瞬时流场中的一条曲线，曲线上任意点的切线方向与该点速度矢量方向一致。

数学方程（欧拉视角）：

$$\frac{\mathrm{d}x}{u(x,y,z,t_0)} = \frac{\mathrm{d}y}{v(x,y,z,t_0)} = \frac{\mathrm{d}z}{w(x,y,z,t_0)}$$

积分时将 t_0 视为常数，不出现时间自变量。

物理意义：流线是该瞬时的"速度方向场"的积分曲线，是欧拉法描述流动最直观的工具。

3a.3.3 流线的性质

1. **定常流动时，流线的形状和位置不随时间变化，且流线与迹线完全重合。**
2. **非定常流动时，流线与迹线一般不重合**，因为不同时刻经过同一点的速度方向不同。
3. 除驻点（滞点）和奇点（源点、汇点、涡点）外，**流线不能相交，不能折转**。
4. 流线只能是光滑曲线或直线。
5. 流线簇的疏密反映流速大小：流线密→流速大，流线疏→流速小。

<details> <summary>展开说明：为什么流线在驻点和奇点处可以相交？ </summary>

- **驻点/滞点（stagnation point）**：该点速度 $|\boldsymbol{V}| = 0$，速度方向不确定，故过该点可以有任意方向的流线。如图绕流中驻点处的流线分支。
- **奇点（singularity）**：该点速度趋于无穷大（如点源、点汇），数学上流线行为奇异，可以有流线相交或发散的特殊结构。不过奇点在实际流体中并不存在，只是势流理论中的理想化模型。
  </details>

3a.3.4 迹线与流线的对比总结

项目	迹线	流线
归属观点	拉格朗日法	欧拉法
追踪对象	同一质点	不同质点
时间角色	t 为自变量	t 为固定参量
定常流中关系	与流线重合	与迹线重合
非定常流中关系	一般不重合	一般不重合
可相交性	可自相交	除驻点和奇点外不可相交

3a.4 物质导数（Material Derivative）

3a.4.1 物理含义

物质导数又称**随体导数**或**全导数**，是流体力学中最重要的概念之一。它回答了一个核心问题：

> **跟随一个流体质点运动时，其物理量随时间的变化率是多少？**

其公式为：

$$\frac{\mathrm{D}(\cdot)}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + \underbrace{(\boldsymbol{V} \cdot \nabla)(\cdot)}_{\text{对流导数}}$$

3a.4.2 两个组成部分的物理解释

分量	名称	物理意义	何时为0
$\partial(\cdot)/\partial t$	**局部导数** (当地导数)	固定空间点上该物理量随时间的变化	定常流
$(\boldsymbol{V} \cdot \nabla)(\cdot)$	**对流导数** (迁移导数)	质点移动到不同空间位置引起的变化	均匀流（物理量空间梯度为0）

3a.4.3 常见物理量的物质导数

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + (\boldsymbol{V} \cdot \nabla)\boldsymbol{V} \qquad \text{（加速度）}$$

$$\frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial p}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla p \qquad \text{（压力变化率）}$$

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla\rho\qquad\text{（密度变化率）}$$

3a.4.4 物质导数的直观比喻（Anderson 山洞比喻）

假设你要进入一个山洞：

- 山洞内温度低于洞外温度，走入洞口时感觉到气温**降低** → **对流导数**（空间位置变化引起）
- 就在你踏入洞口的一瞬间，有人往你脖子里扔了一个冰球，你感觉到**额外**的降温 → **局部导数**（当地温度突变）
- 你所感受到的**总的温度变化** → **物质导数**

3a.5 局部加速度、对流加速度与总加速度求解

3a.5.1 加速度的分解

流体质点的总加速度（物质加速度）为：

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t}=\underbrace{\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}}_{\text{局部加速度}}+\underbrace{(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}}_{\text{对流加速度}}$$

说明：

- **局部加速度** $\dfrac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}$：固定点速度随时间变化产生——仅非定常流中非零。
- **对流加速度** $(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}$：质点沿流线运动到速度不同的位置产生——即使定常流也可能非零（如收缩管）。

3a.5.2 典型题求解步骤

已知：欧拉速度场 $\boldsymbol{V}=(u,v,w)=(u(x,y,z,t),\,v(x,y,z,t),\,w(x,y,z,t))$ **求**：流体质点在 (x,y,z) 处、t 时刻的加速度。

标准步骤：

1. **确定速度分量表达式** u,v,w。
2. **求局部加速度分量**：$\partial u/\partial t$，$\partial v/\partial t$，$\partial w/\partial t$。
3. **求对流加速度分量**：

   $$a_{x,\mathrm{conv}}=u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}$$

   类似地求 y、z 分量。

4. **合成总加速度**：各分量相加即得。

3a.5.3 例题模板

题目：已知二维速度场 $u = 2x + 3t$，$v = -2y$。求点 $(1, 1)$ 在 $t = 1$ 时的加速度。

解答：

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \\ &= 3 + (2x + 3t)(2) + (-2y)(0) + 0 \\ &= 3 + 4x + 6t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_y &= \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} \\ &= 0 + (2x + 3t)(0) + (-2y)(-2) + 0 \\ &= 4y \end{aligned}$$

代入 $(x, y) = (1, 1), t = 1$：

$$a_x = 3 + 4(1) + 6(1) = 13 \quad a_y = 4(1) = 4$$

总加速度 $\boldsymbol{a} = 13\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$。

讨论：局部加速度 $a_{x,\text{loc}} = 3$（非定常），对流加速度 $a_{x,\text{conv}} = 4x + 6t$（非均匀流）。

3a.5.4 对一维流动的加速度直观理解

考虑收缩管中的定常流动：$u = u(x)$（一维）。

$$a_x = u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

无局部加速度（定常），但有对流加速度：流速沿流动方向增大（收缩管），正加速度；反之（扩张管），负加速度（减速）。

易混点与常考点

易混点辨析

易混概念	混淆原因	区别要领
拉格朗日 vs 欧拉	都描述流动，初学者易混淆立场	拉格朗日是"盯质点"，欧拉是"盯地点"
定常 vs 均匀	都意味着"不变"	定常→时间不变；均匀→空间不变
迹线 vs 流线	定常时重合易误认为始终相同	非定常时不重合
局部加速度 vs 对流加速度	名称中都有"加速度"	局部是$\partial \boldsymbol{V}/\partial t$（时间变化），对流是$(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}$（空间变化）
物质导数 vs 偏导数	符号$\mathrm{D}/\mathrm{D}t$ vs $\partial/\partial t$	物质导数跟踪质点，偏导数是固定空间点

常考点

1. **直接默写/填空**：物质导数公式、加速度展开式、迹线流线微分方程。
2. **判断说法正误**：流线不能相交（√ 但驻点奇点例外）等。
3. **给定速度场求加速度**：按分量展开计算，注意区分局部和对流。
4. **给定速度场求迹线方程或流线方程**：仔细看是定常还是非定常，用对应的微分方程。
5. **概念对比论述**：拉格朗日法与欧拉法比较、迹线与流线的区别与联系。

典型题解题模板

模板1：求加速度

> 给定 $\boldsymbol{V}=(u(x,y,z,t),v(x,y,z,t),w(x,y,z,t))$

$$a_x=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}$$

同法求 a_y,a_z，最后得 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$。

模板2：求迹线方程

> **定常流**：$\dfrac{\mathrm{d}x}{u(x,y,z)}=\dfrac{\mathrm{d}y}{v(x,y,z)}=\dfrac{\mathrm{d}z}{w(x,y,z)}$，耦合解得 $y=f(x),z=g(x)$。

非定常流：$\dfrac{\mathrm{d}x}{u(x,y,z,t)}=\dfrac{\mathrm{d}y}{v(x,y,z,t)}=\dfrac{\mathrm{d}z}{w(x,y,z,t)}=\mathrm{d}t$，四个方程联立求解。

模板3：求流线方程 #

固定 $t=t_0$，解 $\dfrac{\mathrm{d}x}{u(x,y,z,t_0)}=\dfrac{\mathrm{d}y}{v(x,y,z,t_0)}=\dfrac{\mathrm{d}z}{w(x,y,z,t_0)}$。

本章覆盖清单

覆盖项编号	原始重点内容	对应章节	状态
3a-01	拉格朗日法与欧拉法区别	§ 3a.1	√ 已写
3a-02	一维/二维/三维；定常/非定常分类	§ 3a.2	√ 已写
3a-03	迹线与流线定义和特点	§ 3a.3	√ 已写
3a-04	物质导数	§ 3a.4	√ 已写
3a-05	局部加速度、对流加速度、总加速度求解	§ 3a.5	√ 已写

主要参考资料与依据

1. **Munson, B.R., Young, D.F., Okiishi, T.H., Huebsch, W.W.** *Fundamentals of Fluid Mechanics* (7th ed.). John Wiley & Sons. —— Chapter 4: Fluid Kinematics. 是本章最直接的权威教材参考，包括Eulerian/Lagrangian描述、物质导数、流线和迹线的标准定义。
2. **White, F.M.** *Fluid Mechanics* (8th ed.). McGraw-Hill. —— Chapter 4: Differential Relations for Fluid Flow. 物质导数的详细推导和加速度分量展开。
3. **Fox, R.W., McDonald, A.T., Pritchard, P.J.** *Introduction to Fluid Mechanics* (8th ed.). —— Chapter 4: Fluid Kinematics. 流线、迹线、脉线的明确区分与图示。
4. **Anderson, J.D. Jr.** *Fundamentals of Aerodynamics* (5th ed.). McGraw-Hill. —— § 2.3-2.4. 物质导数的"山洞比喻"权威出处。
5. **吴望一.** 《流体力学》（第2版）. 北京大学出版社. —— 中文经典教材，国内许多高校流体力学教学的主要参考。
6. **北京航空航天大学 航空发动机研究院.** 《流体的加速度》 和 《迹线、流线和脉线》. —— 国内优质教学资料，对概念讲解清晰直观。

7. **Wikipedia.** *Lagrangian and Eulerian specification of the flow field.* —— 开源参考，仅供参考对比。
8. **LibreTexts Engineering.** *5.1: Lagrangian and Eulerian descriptions.* —— 物质导数作为拉格朗日与欧拉"桥梁"的论述。

第3章 流体运动学（二）：系统与控制体

一页式：本章名词与公式解释

名词	符号 / 公式	简要解释
系统 (System)	—	确定的、包含相同流体质点集的物质团，随流体运动，边界可变但质量不变。拉格朗日观点。
控制体 (Control Volume, CV)	—	流场中选定的固定空间区域，边界称为控制面。欧拉观点。
控制面 (Control Surface, CS)	CV 的边界面	流体可以穿越的边界；可以是真实壁面或虚拟截面。
广延量 (Extensive Property)	B	与系统质量成正比的物理量（如质量 m、动量 $m\vec{V}$、能量 E）。可积分：$B_{\text{sys}} = \int_{\text{sys}} \rho b \, dV$。
强度量 (Intensive Property)	b	单位质量的广延量（如 $b = 1$ 质量、$b = \vec{V}$ 速度、$b = e$ 比能）。$b = dB/dm$。
雷诺输运定理 (Reynolds Transport Theorem, RTT)	$\frac{dB_{\text{sys}}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{CV}} \rho b \, dV + \int_{\text{CS}} \rho b \, (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) \, dA$	将系统变化率转化为控制体存储变化 + 控制面净流出的桥梁公式。
控制面速度分布	$\vec{V}_r(\vec{r}, t)$	流体质点在控制面上相对于控制面的速度矢量场。对固定 CV：$\vec{V}_r = \vec{V}$。
外法向单位矢量	$\vec{n}$	控制面微元 dA 的向外法向，定义了正流出方向。
$\vec{V} \cdot \vec{n}$ 的点积意义	$\vec{V}\cdot\vec{n}=	\vec{V}
流出/流入符号约定	$\int_{\text{CS}} \rho b(\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$	正 = 净流出；负 = 净流入。计算时常拆为：$\sum_{\text{out}} \dot{m}b - \sum_{\text{in}} \dot{m}b$。
物质导数与 RTT 的对偶关系	$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla$	微分形式的拉→欧桥梁；RTT 是积分形式的同一桥梁。

本章核心公式一览

雷诺输运定理（一般形式，固定不变形控制体）：

$$\boxed{\frac{dB_{\text{sys}}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{CV}} \rho b\, dV + \int_{\text{CS}} \rho b\, (\vec{V}\cdot\vec{n})\, dA} \tag{3b-1}$$

可变形 / 运动控制体的形式：

$$\boxed{\frac{dB_{\text{sys}}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\text{CV}} \rho b\, dV + \int_{\text{CS}} \rho b\, (\vec{V}_r\cdot\vec{n})\, dA} \tag{3b-2}$$

其中 $\vec{V}_r = \vec{V} - \vec{V}_{\text{CS}}$ 为流体相对于控制面的速度。

定常流动特例：

$$\frac{dB_{\text{sys}}}{dt} = \int_{\text{CS}} \rho b\, (\vec{V}\cdot\vec{n})\, dA \tag{3b-3}$$

控制体内存储项为零，系统变化率仅取决于穿过控制面的净通量。

一维近似（均匀进出口截面）：

$$\frac{dB_{\text{sys}}}{dt} = \frac{d}{dt}\big(\rho b V\big)_{\text{CV}} + \sum_{\text{out}} \dot{m}_i b_i - \sum_{\text{in}} \dot{m}_j b_j \tag{3b-4}$$

正文深度讲解

1. 系统与控制体

1.1 系统（System）

定义：系统中始终由同一组流体质点构成，其质量恒定不变。系统的边界随流体一起运动，就像一个可以任意伸缩变形的"口袋"包裹着一团固定的流体。

核心性质：

- **质量守恒**：系统质量 $m_{\text{sys}} = \text{const}$。
- **跟随运动**：系统边界速度等于边界处流体的速度。
- **拉格朗日观点**：追踪"那一团流体"的运动和变化。
- **适用定律**：牛顿第二定律、热力学第一/二定律等物理定律都是针对"系统"表述的。

形象比喻：想象在一辆行驶的公交车里观察一个漂浮的气球。气球就是这个"系统"——不管车怎么开、气球飘到哪里，你关注的都是这个气球本身。

数学表述：设广延量 B_{sys} 为系统所具有的某种物理量（质量、动量、能量等），则

$$B_{\text{sys}}(t) = \int_{V_{\text{sys}}(t)} \rho b \, dV$$

其中 b 为单位质量所具有的该物理量（即强度量）。

1.2 控制体（Control Volume）

定义：控制体是流场中被固定选取的空间区域，其边界称为控制面（Control Surface, CS）。流体可以穿越控制面自由进出。

核心性质：

- **空间固定**：对于最常见的固定控制体，其形状和位置不随时间改变。
- **质量可变化**：控制体内的质量可以随时间增加或减少。
- **欧拉观点**：着眼于"某个空间区域"上发生的变化，而非追踪特定流体团。
- **工程常用**：喷管、泵、管道接头、机翼绕流等场景，人们对"某个截面之间的区域"更感兴趣。

形象比喻：站在河边的固定位置观察一个渔网——渔网就是控制体，鱼（流体）可以游进和游出，你关心的是网内鱼的数量如何变化。

1.3 系统 vs. 控制体：对比与联系

对比项	系统	控制体
视角	拉格朗日（跟随质点）	欧拉（固定空间）
质量	恒定	可变化
边界	随流体运动，可变形	固定（通常）
适用定律	可直接应用物理定律	需经过 RTT 转换
工程便利性	困难（追踪所有质点不现实）	方便（只关心进出截面）

关键矛盾：物理定律（如 $F = ma$）天然适用于系统，但工程问题天然需要控制体。雷诺输运定理就是解决这一矛盾的桥。

---

2. 雷诺输运定理（RTT）—— 系统的拉格朗日导数 → 控制体的欧拉描述

2.1 定理的数学推导（直觉理解）

在时刻 t，系统与控制体重合，因此 $B_{\text{sys}}(t) = B_{\text{CV}}(t)$。

经过 Δt 时间，系统移动，而控制体保持不动。此时：

$$B_{\text{sys}}(t+\Delta t) = B_{\text{CV}}(t+\Delta t) - [\text{从 CV 流出的量}] + [\text{流入 CV 的量}]$$

系统变化率为：

$$\frac{dB_{\text{sys}}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{B_{\text{sys}}(t+\Delta t) - B_{\text{sys}}(t)}{\Delta t}$$

代入并整理得：

$$\boxed{\frac{dB_{\text{sys}}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{CV}} \rho b \, dV + \int_{\text{CS}} \rho b \, (\vec{V} \cdot \vec{n}) \, dA}$$

这就是雷诺输运定理。

2.2 两项的物理意义

项	数学形式	物理意义
当地项 (Local term / Unsteady term)	$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{CV}} \rho b \, dV$	控制体内 B 随时间的**本地增量**。非定常流动中即使没有净流入/流出，此项也可能非零。
对流项 (Convective term / Flux term)	$\int_{\text{CS}} \rho b \, (\vec{V} \cdot \vec{n}) \, dA$	单位时间内穿过控制面净流出的 B。正 = 净流出，负 = 净流入。

2.3 为什么 RTT 是"拉格朗日→欧拉"的桥梁？

这个问题是本章的核心考点。理解如下：

1. **拉格朗日系统**的缺点是：你需要标记并追踪每一个质点。对于工程流动问题，这是几乎不可能完成的任务（每秒钟有 10^{23} 量级的分子）。
2. **欧拉控制体**的优点是：你不关心"哪个质点去了哪里"，只关心"在某个空间截面上的流动参数"——这正是工程师测量和计算的数据（比如管道入口/出口的流速、压力、温度）。
3. **RTT 的本质**：将 $\frac{d}{dt}$（跟随系统）转化为 $\frac{\partial}{\partial t} + \int_{\text{CS}} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$（固定在空间上）。它实际上是**三维空间中的莱布尼茨积分法则**（Leibniz Integral Rule）在流体力学中的具体应用。
   - 莱布尼茨法则一维形式：

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t,x)dt = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}dt + f(b,x)\frac{db}{dx} - f(a,x)\frac{da}{dx}$$

- RTT 是其在三维空间上的推广：边界项（$\frac{db}{dx}, \frac{da}{dx}$）变成了控制面上的法向通量积分。

4. **类比**：物质导数 $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla$ 是微分版的"系统→控制体"桥梁，而 RTT 是积分版的同一桥梁。在微分形式中，对流项是 $\vec{V} \cdot \nabla b$；在积分形式中，对流项是 $\int_{\text{CS}} \rho b(\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$。

---

3. 控制面速度分布与 $\vec{V} \cdot \vec{n}$

3.1 控制面上的速度分布

在控制面上，流体的速度 $\vec{V}$ 可能是空间坐标和时间的函数：

$$\vec{V} = \vec{V}(\vec{r}, t), \quad \vec{r} \in \text{CS}$$

在 RTT 的通量积分中，真正起作用的是速度的法向分量，而非整个速度矢量。

3.2 $\vec{V} \cdot \vec{n}$ 的物理意义

$\vec{n}$ 是控制面微元 dA 的**外法向单位矢量**（由控制体内部指向外部）。

$\vec{V} \cdot \vec{n}$ 是速度矢量在法向的投影（标量）：

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = |\vec{V}| \cos \theta$$

其中 θ 是 $\vec{V}$ 与 $\vec{n}$ 的夹角。

$\vec{V} \cdot \vec{n}$ 的符号	物理含义
$\vec{V} \cdot \vec{n} > 0$	流体**流出**控制体（$\theta < 90^\circ$）
$\vec{V} \cdot \vec{n} < 0$	流体**流入**控制体（$\theta > 90^\circ$）
$\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$	流体平行于控制面（如壁面边界，$\theta = 90^\circ$）

3.3 通量积分的展开

$$\int_{\text{CS}} \rho b(\vec{V} \cdot \vec{n})\, dA = \underbrace{\int_{\text{CS}_{\text{out}}} \rho b\, V_n\, dA}_{\text{流出部分}} - \underbrace{\int_{\text{CS}_{\text{in}}} \rho b\, |V_n|\, dA}_{\text{流入部分}}$$

其中 $V_n = \vec{V} \cdot \vec{n}$。注意流入项天然为负，因此公式中显式写出负号时，被积函数要取绝对值。

一维近似下（进出口截面均匀分布）：

$$\int_{\text{CS}} \rho b(\vec{V} \cdot \vec{n})\, dA \approx \sum_{\text{out}} \rho_i V_i A_i b_i - \sum_{\text{in}} \rho_j V_j A_j b_j = \sum_{\text{out}} \dot{m}_i b_i - \sum_{\text{in}} \dot{m}_j b_j$$

这里 $\dot{m} = \rho V A$ 为质量流量。

4. RTT 在不同物理定律中的应用预览

将 B 和 b 代入 RTT，即可得到各守恒定律的控制体方程：

守恒定律	B（广延量）	b（强度量）	方程形式
质量守恒	m	1	$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{CV}} \rho\, dV + \int_{\text{CS}} \rho(\vec{V}\cdot\vec{n})\, dA = 0$
动量守恒	$m\vec{V}$	$\vec{V}$	$\sum \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{CV}} \rho\vec{V}\, dV + \int_{\text{CS}} \rho\vec{V}(\vec{V}\cdot\vec{n})\, dA$
能量守恒	E	e	$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{CV}} \rho e\, dV + \int_{\text{CS}} \rho e(\vec{V}\cdot\vec{n})\, dA$

这些方程将在第 4 章详细展开。此处只需理解 RTT 是推导它们的统一框架。

易混点与常考点

易混点一：系统 vs. 控制体 → 到底是什么不同？

常见错误：认为控制体"静止不动"而系统"一直在动"。

正确理解：

- 系统也可能静止（如果流体本身不运动），控制体也可以运动（如随火箭运动的控制体）。本质区别在于：系统的**物质组成不变**，控制体的**空间范围固定**。
- 对于运动/变形的控制体，RTT 需要使用相对速度 $\vec{V}_r = \vec{V} - \vec{V}_{\text{CS}}$。

易混点二：$\frac{d}{dt}$ vs. $\frac{\partial}{\partial t}$ vs. $\frac{D}{Dt}$

符号	含义	适用对象
$\frac{dB_{\text{sys}}}{dt}$	**系统**的全导数，跟随同一团流体	RTT 的左侧
$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{CV}} \rho b\, dV$	**控制体**内物理量对时间的偏导数，保持控制体空间不变	RTT 的当地项
$\frac{D}{Dt}$	物质导数，跟随流体质点的全导数	微分形式

易混点三：通量项符号约定

常见错误：计算通量时符号搞反，导致得出"质量不守恒"的错误结论。

正确做法：

1. 记住 $\vec{n}$ 指向控制体外为正。

2. $\vec{V}\cdot\vec{n} > 0$ 的地方是流出、对"系统变化率"贡献正。
3. 壁面上 $\vec{V}\cdot\vec{n} = 0$，通量积分为零。
4. 对一维简化：$\int_{\mathrm{CS}} \rho b(\vec{V}\cdot\vec{n})dA = \sum_{\mathrm{out}} \dot{m}b - \sum_{\mathrm{in}} \dot{m}b$。

常考点

1. **选择题/简答题**：问 RTT 的两项分别代表什么物理含义，为什么它是拉格朗日和欧拉之间的桥梁。
2. **概念区分题**：给出一个情境，判断研究对象是系统还是控制体。
3. **符号判断题**：给定流动方向和法向量，判断 $\vec{V}\cdot\vec{n}$ 的正负，以及该面是流入还是流出。
4. **简单应用**：利用 RTT 推导一维定常流动的质量守恒控制方程。
5. **与物质导数的对偶关系**：证明 RTT 是物质导数的积分版本。

典型题解题模板

题型：利用 RTT 推导定常一维管流的连续性方程

【问题】 一维定常不可压缩流体流过截面变化的管道，利用 RTT 推导 $Q = A_1V_1 = A_2V_2$。

【模板步骤】

步骤	操作	示例
① 定义 B 和 b	质量守恒：$B = m$，$b = 1$	$B = m, b = 1$
② 写出 RTT	$\frac{dB_{\mathrm{sys}}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{CV}} \rho b\,dV + \int_{\mathrm{CS}} \rho b(\vec{V}\cdot\vec{n})\,dA$	—
③ 代入 $b = 1$	$\frac{dm_{\mathrm{sys}}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{CV}} \rho\,dV + \int_{\mathrm{CS}} \rho(\vec{V}\cdot\vec{n})\,dA$	—
④ 利用系统质量守恒	$\frac{dm_{\mathrm{sys}}}{dt} = 0$（系统质量不变）	$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{CV}} \rho\,dV + \int_{\mathrm{CS}} \rho(\vec{V}\cdot\vec{n})\,dA$
⑤ 定常简化	$\frac{\partial}{\partial t} = 0$，当地项为零	$0 = \int_{\mathrm{CS}} \rho(\vec{V}\cdot\vec{n})\,dA$
⑥ 分割控制面	入口(1)、出口(2)、壁面(w)，壁面上 $\vec{V}\cdot\vec{n} = 0$	$\int_{A_1} \rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dA + \int_{A_2} \rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dA = 0$
⑦ 讨符号	入口：$\vec{V}\cdot\vec{n} = -V_1$（流入），出口：$\vec{V}\cdot\vec{n} = +V_2$（流出）	$-\rho_1V_1A_1 + \rho_2V_2A_2 = 0$
⑧ 一维均匀假设	ρ, V 在截面上均匀	$\rho_1V_1A_1 = \rho_2V_2A_2$
⑨ 不可压缩	$\rho_1 = \rho_2$	$V_1A_1 = V_2A_2$，即 $Q_1 = Q_2$

本章覆盖清单

编号	要点	来源原始重点	状态
3b-01	**系统和控制体定义**：系统（确定物质集合）、控制体（确定空间区域）、控制面、区分与联系	✅ 原始重点	✅ 已覆盖
3b-02	**雷诺输运定理物理意义**：RTT 一般形式、两项含义、系统→控制体的桥梁角色	✅ 原始重点	✅ 已覆盖
3b-03	**控制面速度分布与 $\vec{V}\cdot\vec{n}$ 意义**：法向速度投影、流出/流入/壁面判别、符号约定	✅ 原始重点	✅ 已覆盖
—	广延量 B 与强度量 b 的定义和关系	辅助理解	✅ 已覆盖
—	RTT 与物质导数的对偶关系（微分 vs. 积分）	拓展理解	✅ 已覆盖
—	定常简化、一维近似公式	应用拓展	✅ 已覆盖
—	各守恒定律通过 RTT 的统一框架	第4章预览	✅ 已覆盖

主要参考资料 / 依据

1. **闻建龙《流体力学》（第二版）**，高等教育出版社，第3章 §3.1–3.2：系统与控制体、雷诺输运定理。本报告口径以此教材为准。
2. **Frank M. White, *Fluid Mechanics* (8th ed.)**, Chapter 3: Relation of System Derivatives to Control Volume Formulation, Reynolds Transport Theorem.
3. **Genick Bar-Meir, *Fundamentals of Fluid Mechanics* (Potto Project)**，§5.4: Reynolds Transport Theorem — 提供了 RTT 与莱布尼茨积分法则关系的数学推导。
4. **北京航空航天大学航空发动机教学资料**，《雷诺输运定理》在线文章 — 提供了 RTT 物理意义的通俗图解和推导。
5. **原始重点归档** `source/original-focus.md`：第3章（二）全部3条要点已覆盖。

第4章 流体流动的有限控制体分析

一页式：本章名词与公式解释

名词	符号/公式	简要说明
质量流量	$\dot{m} = \rho Q = \rho v A$	单位时间通过某断面的流体质量，$\mathrm{kg/s}$
体积流量	$Q = vA$	单位时间通过某断面的流体体积，$\mathrm{m^3/s}$
平均速度	$v = \frac{Q}{A}$	流量除以过流断面面积
过流断面	A	与流线垂直的断面
连续性方程	$\dot{m}_{\text{in}} = \dot{m}_{\text{out}}$ 或 $\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$	质量守恒定律在流体力学中的积分形式
不可压连续性方程	$v_1 A_1 = v_2 A_2 \quad \Rightarrow \quad Q_1 = Q_2$	密度不变时，流量守恒
动量方程（积分形式）	$\sum \boldsymbol{F} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{CV}} \boldsymbol{v} \rho \, \mathrm{d}V + \int_{\text{CS}} \boldsymbol{v} \rho (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) \, \mathrm{d}A$	牛顿第二定律对控制体的推广
定常流动量方程（一维）	$\sum \boldsymbol{F} = \dot{m}_2 \boldsymbol{v}_2 - \dot{m}_1 \boldsymbol{v}_1$	定常、单进单出简化形式
动量通量	$\dot{m} \boldsymbol{v} = \rho Q \boldsymbol{v}$	流体携带的动量流率
压力力	pA（沿内法线方向）	流体压强作用于控制面的力
重力	$\boldsymbol{W} = mg$（竖直向下）	控制体内流体的重量
支座反力	$\boldsymbol{R}$	管道/喷嘴对控制体的约束反力
能量方程（积分形式）	$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{CV}} e \rho \, \mathrm{d}V + \int_{\text{CS}} e \rho (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) \, \mathrm{d}A$	热力学第一定律对控制体的推广
总流能量方程（定常一维）	$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + h_p = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + h_t + h_w$	单位重量流体的能量守恒
伯努利方程（理想定常沿流线）	$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \gamma z =$ 常数	理想流体沿流线的机械能守恒
压头/速度头/位置头	$\frac{p}{\gamma}, \frac{v^2}{2g}, z$	三项均为长度量纲，代表对应能量
损失水头	h_w	单位重量流体因黏性耗散的机械能

4.1 连续性方程（质量守恒）

4.1.1 基本形式

连续性方程是质量守恒定律在流体力学中的表达。对空间位置固定的有限控制体，质量守恒的物理陈述为：

> 控制体内质量的增加率 = 流入控制体的净质量流率

数学形式（积分型）：

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{CV}}\rho\,\mathrm{d}V+\int_{\mathrm{CS}}\rho(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}A=0 \tag{4-1}$$

其中 CV 为控制体，CS 为控制面，$\boldsymbol{n}$ 为控制面外法线单位向量（流出为正）。

4.1.2 定常一维形式

对于**定常流动**，$\frac{\partial}{\partial t}=0$，且认为各断面流动参数均匀（一维假设），则式(4-1)简化为：

$$\rho_1 v_1 A_1=\rho_2 v_2 A_2 \tag{4-2}$$

即流入控制体的质量流量等于流出的质量流量。

4.1.3 不可压缩流体

若流体不可压缩（$\rho=$ 常数），则式(4-2)进一步简化为：

$$v_1 A_1=v_2 A_2 \quad \text{或} \quad Q_1=Q_2 \tag{4-3}$$

即体积流量守恒。

4.1.4 断面越小流速越大——核心结论

由式(4-3)，对同一不可压流动：

$$v_2=\frac{A_1}{A_2}v_1$$

- 当 $A_2<A_1$ 时，$v_2>v_1$——**断面越小，流速越大**。
- 当 $A_2>A_1$ 时，$v_2<v_1$——**断面越大，流速越小**。

> **物理直觉**：水从粗水管进入细水管时，水流自动加速；从细管进入粗管时，流速降低。这就是连续性方程在日常经验中的体现。

典型题（例题4.4类型）：一段变截面管道，已知入口面积 A_1、入口速度 v_1、出口面积 A_2，求出口速度 v_2。

解题步骤：

1. 选控制体（管道内流体区域）；
2. 判断是否定常、是否不可压；
3. 应用 $v_1A_1=v_2A_2$；
4. 代入已知数值求解。

习题4.3类型：分支管道问题——总管分为两支管或多支管。

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 + v_3 A_3 + \cdots$$

解题要点：注意各支管的**代数符号**——流入为负、流出为正（以外法线方向为正向），但练习题中一般直接按绝对值列总流入 = 总流出。

4.2 动量方程（动量守恒）

4.2.1 积分形式

动量方程是牛顿第二定律在流体力学中的推广。对固定不动的控制体：

$$\sum \boldsymbol{F} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{CV}} \boldsymbol{v}\rho\,\mathrm{d}V + \int_{\mathrm{CS}} \boldsymbol{v}\rho(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}A \tag{4-4}$$

物理含义：控制体内流体所受的合外力 = 控制体内动量随时间的变化率 + 控制面上净流出的动量通量。

其中合外力 $\sum \boldsymbol{F}$ 包括：

- **体积力**（body force）：主要是重力 $\boldsymbol{W} = \int_{\mathrm{CV}} \rho\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}V$；
- **表面力**（surface force）：$\int_{\mathrm{CS}}(-p\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}A$（压力）和黏性力。

4.2.2 定常一维简化（关键公式）

对**定常、单进单出**的流动，式(4-4)简化为：

$$\sum \boldsymbol{F} = \dot{m}_2\boldsymbol{v}_2 - \dot{m}_1\boldsymbol{v}_1 = \rho_2 Q_2\boldsymbol{v}_2 - \rho_1 Q_1\boldsymbol{v}_1 \tag{4-5}$$

其中 $\dot{m}_1 = \rho_1 v_1 A_1$，$\dot{m}_2 = \rho_2 v_2 A_2$。注意 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 的方向分别与流入、流出的流速方向一致。

在直角坐标系中写为分量形式：

$$\begin{aligned}\sum F_x &= \dot{m}_2 v_{2x} - \dot{m}_1 v_{1x}\\ \sum F_y &= \dot{m}_2 v_{2y} - \dot{m}_1 v_{1y}\\ \sum F_z &= \dot{m}_2 v_{2z} - \dot{m}_1 v_{1z}\end{aligned} \tag{4-6}$$

4.2.3 解题步骤（习题4.6类型——弯管/喷嘴支座反力）

典型的动量方程应用是求流体对管道/喷嘴的支座反力。解题模板如下：

STEP 1：选取控制体（以管道内壁和进出口断面为控制面）。

STEP 2：标注已知条件——$p_1, p_2, A_1, A_2, v_1, v_2$（或通过连续性方程先求出速度）。

STEP 3：画外力分析图（free-body diagram）：

- 进出口断面上的**压力力**：$p_1 A_1$（方向：内法线，即指向控制体内部）、$p_2 A_2$（同理）；
- **重力** $W = mg$（控制体内流体重量，竖直向下）；
- **支座反力** $\boldsymbol{R}$（待求，通常分为 R_x 和 R_y 两个分量）。

STEP 4：列动量方程（分 x、y 方向）：

$$\sum F_x = \dot{m}(v_{2x} - v_{1x}), \quad \sum F_y = \dot{m}(v_{2y} - v_{1y})$$

注意等式左边是**外力**（包括压力力、重力、支座反力），右边是**动量通量差**。

STEP 5：求解支座反力 R_x、R_y，取合力。

4.2.4 常见题型与易错点

题型	关键点	易错
弯管受力（90°、45°等）	注意流速方向改变导致动量变化，须列矢量方程	忘记考虑入口/出口压力
喷嘴射流	出口为自由射流，出口压强 = 大气压（表压为零）	误认为出口也有压力力贡献
射流冲击平板	平板静止或运动；对称分流时 y 向动量变化为零	忽略分流角度
控制体上有固体壁面	支座反力包含壁面约束力	漏画或画反方向

⚠️ **常见误解**：动量方程的左边 $\sum \boldsymbol{F}$ 是**流体所受的合外力**。如果要问**流体对管壁的作用力**，则需用牛顿第三定律取反作用力。

4.3 能量方程与伯努利方程

4.3.1 积分形式能量方程

能量方程是热力学第一定律对控制体的推广：

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{CV}} e\rho \, \mathrm{d}V + \int_{\mathrm{CS}} e\rho(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}) \, \mathrm{d}A \tag{4-7}$$

其中 $e = u + \frac{v^2}{2} + gz$ 是单位质量流体的总比能（内能+动能+势能）。

4.3.2 总流能量方程（定常一维）

对定常流动，且考虑轴功和水头损失，工程上常用的形式为：

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + h_p = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + h_t + h_w \tag{4-8}$$

其中：

- $\frac{p}{\gamma}$ — **压头**（pressure head），单位重量流体的压力能；
- $\frac{v^2}{2g}$ — **速度头**（velocity head），单位重量流体的动能；
- z — **位置头**（elevation head），单位重量流体的位置势能；
- h_p — **输入水头**（泵功）；
- h_t — **输出水头**（涡轮功）；
- h_w — **损失水头**（head loss），由黏性耗散引起。

> **几何意义**：三项之和（$\frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + z$）称为**总水头**。沿流程总水头线逐渐下降（有损失时）。

4.3.3 伯努利方程（理想定常不可压沿流线）

对于**理想流体**（无黏性，$h_w = 0$）、**定常、不可压、沿同一流线**的情况，式(4-8)退化为：

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 \tag{4-9}$$

或等价地：

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \gamma z = 常数 \tag{4-10}$$

4.3.4 运用伯努利方程求流速

这是本章最核心的计算类型之一，常与连续性方程联合使用。

标准解题模板：

STEP 1：选定流线或断面 1 和断面 2（选在流动参数已知或待求的位置）。

STEP 2：列出伯努利方程：

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}+z_1=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}+z_2$$

STEP 3：列出连续性方程 $v_1A_1=v_2A_2$，联立。

STEP 4：代入已知条件，消去未知量，求解目标流速。

STEP 5：验证合理性（如流速结果是否满足连续性）。

常见配置：

场景	已知条件	策略
水箱孔口出流	$p_1=p_2=p_{\mathrm{atm}}$（表压=0），$v_1\approx 0$（大水箱水面）	孔口流速 $v_2=\sqrt{2g(z_1-z_2)}$（托里拆利公式）
文丘里流量计	p_1、p_2 由测压差读数提供，已知 A_1、A_2	联立伯努利+连续性得 $v=\sqrt{\frac{2(p_1-p_2)}{\rho[1-(A_2/A_1)^2]}}$
皮托管测速	滞止点 $v=0$，静压 p、总压 p_0 已知	$v=\sqrt{\frac{2(p_0-p)}{\rho}}$
水平管道（$z_1=z_2$）	忽略位差	直接由压差和面积比求流速

4.4 易混点辨析

4.4.1 连续性方程 vs 伯努利方程

连续性方程	伯努利方程
质量守恒	能量守恒
$vA=$ 常数	$p+\frac{1}{2}\rho v^2+\gamma z=$ 常数
仅涉及速度与面积	涉及压力、速度、高度三者的关系
断面越小流速越大	**流速越大压力越小**（文丘里效应）

> **口诀对照**：
>
> - 连续性：细管流速大
> - 伯努利：流速大处压强小

4.4.2 动量方程 vs 伯努利方程

动量方程	伯努利方程
含力（压力、重力、支座反力）	不含力（只有能量项）
矢量方程（有方向）	标量方程（无方向）
可以求支座反力	不能求支座反力
适用于有能量损失的流动（用修正系数）	仅适用于无黏/可忽略损失的理想化情况

4.4.3 关于$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$的符号约定

- $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}>0$：流体流出控制体；
- $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}<0$：流体流入控制体；
- 在计算质量流量时，通常取绝对值：$\dot{m}=\rho vA$，流入为负、流出为正代入积分。

4.4.4 静压强 p 的使用

- **表压**：大多数考题中的压强均为表压（相对于大气压），大气压处 $p=0$。
- **绝对压**：在计算中如需绝对压，题目会特别说明。
- 在伯努利方程中，两边同时减去大气压不影响结果，因此可直接用表压。

4.4.5 均匀流假设与断面平均速度

- 实际流动的断面速度分布不均匀，但有限控制体分析中采用**断面平均速度** $v=Q/A$。
- 动量方程严格应用时应有**动量修正系数** $\beta=\frac{1}{A\bar{v}^2}\int_A v^2\,\mathrm{d}A$，层流 $\beta=4/3$、湍流 $\beta\approx1.02-1.05$。本科考题中若无说明，取 $\beta=1$。

4.5 常考点与典型题解题模板

考点一：连续性方程求速度（E）

题目特征：变截面管道，已知断面面积和某断面流速，求另一断面流速。

解法：直接用 $v_1A_1 = v_2A_2$（不可压）。

考点二：弯管/喷嘴的支座反力（E） #

题目特征（习题4.6类型）：一段弯管或喷嘴，已知进出口面积、压力、流速，求支座所受合力。

模板：

1. 由连续性方程 $v_1A_1 = v_2A_2$ 求 v_2（若未给全）；
2. 列动量方程：

$$\begin{aligned} x\text{方向}: & \ p_1A_1 - p_2A_2\cos\theta + R_x = \dot{m}(v_2\cos\theta - v_1) \\ y\text{方向}: & \ -p_2A_2\sin\theta - W + R_y = \dot{m}(v_2\sin\theta - 0) \end{aligned}$$

3. 解出 R_x、R_y，取反力 $-R_x$、$-R_y$ 即为流体对管道的作用力。

考点三：伯努利方程+连续性求流速（E） #

题目特征：文丘里管、孔板流量计、水箱出流等，已知压差或高度差，求流速或流量。

模板：

1. 列伯努利方程 $p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2$；
2. 列连续性方程 $v_1A_1 = v_2A_2$；
3. 联立消去 v_1 或 v_2，求解目标量。

考点四：自由射流撞击平板/叶片 #

题目特征：一股射流以速度 v 撞击固定或运动的平板，求作用力。

模板：

1. 取射流为控制体；
2. 设平板法线方向为 n，射流偏转角度已知；
3. 动量方程 $\sum F_n = \dot{m}(v_{2n} - v_{1n})$；
4. 注意射流出口静压=大气压（表压为零），仅有动量的变化贡献作用力。

4.6 本章覆盖清单

对照原始重点文件进行覆盖情况自查：

ID	重点内容	覆盖位置	状态
4-01	连续性方程（质量守恒）；流量不变时过流断面越小流速越大；例题4.4、习题4.3类型	§ 4.1	✅ 覆盖
4-02	动量方程（动量守恒）；习题4.6类型（弯管/喷嘴支座反力）	§ 4.2	✅ 覆盖
4-03	能量方程（能量守恒）；伯努利方程求流速	§ 4.3	✅ 覆盖

需额外说明的补充项

本稿在原始重点基础上补充了：

1. **名词解释汇总表**（一页式），涵盖质量流量、体积流量、平均速度、过流断面、动量通量、压力力、重力、支座反力、压头/速度头/位置头、损失水头等术语。
2. **动量方程解题步骤（5步模板）**，针对习题4.6类型的弯管受力问题。
3. **伯努利方程+连续性方程联立求流速**的标准解法模板和常见配置表。
4. **易混点辨析**：连续性方程 vs 伯努利方程、动量方程 vs 伯努利方程、表压 vs 绝对压、断面平均速度与动量修正系数。
5. **四类典型题解题模板**。

主要参考资料/依据

1. **教材口径**：Flow of Fluids Through Valves, Fittings, and Pipe (CRANE) 相关工程流体力学内容；Fox, McDonald & Pritchard, *Introduction to Fluid Mechanics* — Chapter 5 (Finite Control Volume Analysis)。
2. **公开资料**：
   - MIT OCW 1.060 (Madsen) — Summary of Finite Control Volume Analysis
   - EaglePubs (ERAU) — Continuity Equation, Momentum Equation
   - Wikibooks — Fluid Mechanics / Control Volume Analysis
   - 知乎专栏《工程师眼中的流体力学（4）——理想流体守恒律》等
3. **原始重点文件**：`source/original-focus.md#第4章` 三条核心重点已全部覆盖。

本章初稿完成于 2026-07-03，子 agent（deepseek-v4-flash）。待主 agent 整合审校。

第5章 流体流动的微分分析

一页式：本章名词与公式解释

名词	符号/含义	简要解释
散度（divergence）	$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$	速度场的散度，代表流体微元的**体积膨胀率**（单位体积的体积变化率）。
旋度（vorticity/curl）	$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{V}$	描述流体微元的旋转强度。
体积膨胀率	$\nabla \cdot \boldsymbol{V}$	流体微元体积的相对变化率。$\nabla \cdot \boldsymbol{V} > 0$：膨胀；$\nabla \cdot \boldsymbol{V} < 0$：收缩；$= 0$：不可压缩。
不可压缩条件	$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0$ 或 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$	流体密度不变时，微分连续性方程退化为散度为零。
有旋流动	$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{V} \neq \boldsymbol{0}$	流场中流体微元有旋转运动。
无旋流动	$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{V} = \boldsymbol{0}$	流场中每个点旋度为零；无旋流动存在速度势函数。
欧拉方程	$\rho \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t} = -\nabla p + \rho \boldsymbol{g}$	**无粘**流体的运动微分方程（忽略黏性力）。
N-S 方程	$\rho \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t} = -\nabla p + \rho \boldsymbol{g} + \mu \nabla^2 \boldsymbol{V}$	**有粘**不可压缩牛顿流体的运动微分方程（包括黏性力项）。
层流（laminar flow）	—	流体质点分层有序运动，流层间不掺混。$\mathrm{Re} < 2300$（圆管）。
固定平板间定常层流	两固定平行平板之间的泊肃叶流动（Planar Poiseuille flow）。	速度分布为抛物线形。
圆管泊肃叶流	Hagen-Poiseuille 流动。	速度分布为旋转抛物面。

核心公式索引

公式	表达式
微分连续性方程（一般形式）	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V}) = 0$
不可压缩微分连续性方程	$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0$
欧拉方程（矢量形式）	$\rho \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t} = -\nabla p + \rho \boldsymbol{g}$
N-S 方程（不可压缩，矢量形式）	$\rho \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t} = -\nabla p + \rho \boldsymbol{g} + \mu \nabla^2 \boldsymbol{V}$
x 方向 N-S 方程分量	$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$
固定平板间定常层流速度分布（$y=0$ 和 $y=h$ 固定）	$u(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(y^2 - hy)$
圆管定常层流速度分布（泊肃叶流）	$u(r) = \frac{R^2}{4\mu}\left(-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$
圆管层流最大速度	$u_{\max} = \frac{R^2}{4\mu}\left(-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)$
圆管层流平均速度	$\bar{u} = \frac{1}{2}u_{\max}$
体积流量（圆管层流）	$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu}\left(-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\pi \Delta p R^4}{8\mu L}$ （哈根-泊肃叶定律）

5.1 微分连续性方程与体积膨胀率

5.1.1 微分连续性方程的推导

从微元控制体出发，考虑质量守恒。对固定于空间中的无穷小六面体（边长 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$），流入微元的质量流量减去流出微元的质量流量等于微元内质量随时间的变化率。

在 x 方向:

- 流入质量（左侧面）：$\rho u \,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
- 流出质量（右侧面）：$\left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
- x 方向净流入：$-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

同理得 y 和 z 方向净流入，相加得 **微分连续性方程（质量守恒）** 的通用形式:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0} \tag{5.1}$$

或用散度算子简洁表示为:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho \boldsymbol{V})=0} \tag{5.2}$$

5.1.2 体积膨胀率的物理含义

展开式 (5.2):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla\rho+\rho(\nabla\cdot\boldsymbol{V})=0$$

即:

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}+\rho(\nabla\cdot\boldsymbol{V})=0 \tag{5.3}$$

体积膨胀率定义为 $\nabla\cdot\boldsymbol{V}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$，物理意义是流体微元体积的相对变化率。

从式 (5.3) 可见:

- 若 $\nabla\cdot\boldsymbol{V}>0$：微元体积在增大（膨胀），密度随物质导数减小；
- 若 $\nabla\cdot\boldsymbol{V}<0$：微元体积在缩小（收缩），密度增大；
- 若 $\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0$：体积不变。

5.1.3 不可压缩流动的条件

对于**不可压缩流体**（$\rho=\mathrm{const}$），$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}=0$，式 (5.3) 直接退化为:

$$\boxed{\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0}\quad \text{即} \quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0} \tag{5.4}$$

结论：不可压缩流的充要条件是速度场的散度为零（体积膨胀率为零）。求解流场是否可压缩，只需计算速度场的散度即可。

5.2 流场可压缩性与有旋/无旋判断

5.2.1 可压缩性判断

步骤:

1. 给定速度场 $\boldsymbol{V} = (u, v, w)$；
2. 计算 $\nabla \cdot \boldsymbol{V}$；
3. 若散度处处为零 → 不可压缩；否则 → 可压缩。

例题 5.1（习题 5.1 类型）：已知二维速度场 $\boldsymbol{V} = (2x^2y, -2xy^2)$，判断是否不可压缩。

解：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(-2xy^2) = 4xy - 4xy = 0$$

故该流场**不可压缩**。✅

5.2.2 有旋/无旋判断

旋度（涡量） 定义：

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{V} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} \tag{5.5}$$

判断标准：

- $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \to$ **无旋流动**（存在速度势 ϕ，满足 $\boldsymbol{V} = \nabla\phi$）
- $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0} \to$ **有旋流动**

对于**二维流动**（xy 平面，$w = 0$），旋度简化为：

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{5.6}$$

例题 5.2（习题 5.1 类型续）：判断 $\boldsymbol{V} = (2x^2y, -2xy^2)$ 是否有旋。

解：

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(-2xy^2) - \frac{\partial}{\partial y}(2x^2y) = -2y^2 - 2x^2 = -2(x^2 + y^2) \neq 0$$

故该流场**有旋**。

> **重要易混点**：不可压缩不等于无旋。上例中流场既不可压缩（散度为零）又有旋（旋度不为零），两种性质独立。

5.3 欧拉方程（无粘流动）

5.3.1 推导思路

对无粘流体微元应用牛顿第二定律（$F = ma$），作用力只有表面压力和质量力（重力），没有黏性切应力和法应力。

单位质量流体的运动方程:

$$\boxed{\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t} = \boldsymbol{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p} \tag{5.7}$$

其中 $\boldsymbol{f}$ 为单位质量的质量力（通常为重力 $\boldsymbol{g}$）。

5.3.2 常用形式

矢量形式:

$$\boxed{\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t} = -\nabla p + \rho\boldsymbol{g}} \tag{5.8}$$

直角坐标分量形式（x 方向为例）:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \tag{5.9}$$

5.3.3 适用条件

- 无粘流体（理想流体）;
- 牛顿流体（线性应力-应变率关系）;
- 与连续性方程联立求解。

> **注意**：欧拉方程不能用于边界层内部及近壁面区域（黏性效应显著处）。

5.4 纳维-斯托克斯（N-S）方程

5.4.1 方程形式

对于**不可压缩牛顿流体**（$\mu = \text{const}$），在欧拉方程基础上增加黏性力项:

矢量形式:

$$\boxed{\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t} = -\nabla p + \rho\boldsymbol{g} + \mu\nabla^2\boldsymbol{V}} \tag{5.10}$$

直角坐标分量形式:

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g_x+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\\
\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial y}+\rho g_y+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\\
\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial z}+\rho g_z+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)
\end{aligned} \tag{5.11a-c}$$

5.4.2 各项物理含义

项	含义
$\rho\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}$	局部加速度（非定常项）
$\rho(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}$	对流加速度（惯性项）
$-\nabla p$	压力梯度力
$\rho\boldsymbol{g}$	重力（质量力）
$\mu\nabla^2\boldsymbol{V}$	黏性力（扩散项）

5.4.3 方程特性

- N-S 方程是**非线性偏微分方程**（对流项 $\boldsymbol{V}\cdot\nabla\boldsymbol{V}$ 是非线性的），一般情况难以求得解析解；
- 对于层流中简单几何约束的问题，可忽略对流项或简化后得到解析解；
- 与连续性方程（式 5.4）联立，四个方程求解四个未知数 (u, v, w, p)。

5.5 固定平板间定常层流的速度分布

5.5.1 问题描述

考虑两平行无限大固定平板，间距为 h。不可压缩黏性流体在两板间作定常层流运动，流动仅由 x 方向压力梯度驱动（无上板运动，即**平面泊肃叶流**，Pure Poiseuille flow）。

5.5.2 假设（简化条件）#

假设	数学表达
定常	$\frac{\partial}{\partial t} = 0$
二维、充分发展	$v = 0, w = 0$，且 $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$
仅 x 方向有速度	$\boldsymbol{V} = (u(y), 0, 0)$
重力忽略或与压力合并	可用广义压力 $p^* = p + \rho g y$
无滑移边界条件	$y = 0$ 处 $u = 0$；$y = h$ 处 $u = 0$
流体为不可压缩牛顿流体	$\mu = \mathrm{const}$，$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0$

5.5.3 推导过程

(1) 从 N-S 方程的 x 方向分量出发:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

(2)

- 定常：$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$
- $v = 0$：$v\frac{\partial u}{\partial y} = 0$
- $w = 0$，且沿 z 方向无变化：$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$
- $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$（充分发展），故 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$
- 忽略 x 方向重力，或合并进压力梯度

简化后得:

$$0 = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \mu\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}y^2} \tag{5.12}$$

(3)

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}y^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \tag{5.13}$$

(4)

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} &= \frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}y + C_1 \\
u(y) &= \frac{1}{2\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}y^2 + C_1 y + C_2
\end{aligned} \tag{5.14}
$$

(5)

$$
\begin{cases} u(0) = C_2 = 0 \\ u(h) = \dfrac{1}{2\mu}\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}h^2 + C_1 h = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{2\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}h
$$

(6)

$$
\boxed{u(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(y^2 - hy)} \tag{5.15}
$$

5.5.4 结果分析

- 速度分布为**抛物线**形;
- $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} < 0$（压力沿流向下降）时速度为正;
- 最大速度发生在 $y = h/2$ 处:

$$
u_{\max} = -\frac{h^2}{8\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \tag{5.16}
$$

- 平均速度:

$$
\bar{u} = \frac{1}{h}\int_0^h u(y)\,\mathrm{d}y = -\frac{h^2}{12\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{3}u_{\max} \tag{5.17}
$$

- 壁面切应力（牛顿内摩擦定律）:

$$
\tau_w = \mu \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right|_{y=0} = \frac{h}{2}\left(-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)
$$

> **习题 5.5 类型**：考查由 N-S 方程简化到泊肃叶流、确定边界条件、积分求速度分布的完整过程。

5.6 圆管中定常层流的速度分布（哈根-泊肃叶流）

5.6.1 问题描述

不可压缩黏性牛顿流体在水平直圆管中作定常层流流动。管道半径为 R，流动由轴向压力梯度驱动（Hagen-Poiseuille 流动）。

5.6.2 假设条件

假设	说明
定常	$\frac{\partial}{\partial t} = 0$
轴对称	速度 u_z 仅为径向坐标 r 的函数，$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$
充分发展	$u_r = 0$，$u_\theta = 0$，$\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$
仅有轴向速度	$\boldsymbol{V} = (0, 0, u_z(r))$（柱坐标）
无滑移条件	$r = R$ 处 $u_z = 0$
轴线对称条件	$r = 0$ 处 $\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}r} = 0$

5.6.3 推导过程

(1) 在柱坐标系下，N-S 方程 z 方向分量为:

$$\rho\left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right]$$

(2)

$$0 = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + \mu\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}r}\right) \tag{5.18}$$

(3)

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} \tag{5.19}$$

(4)

$$r\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{2\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}r^2 + C_1$$

由 $r = 0$ 处 $\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}r} = 0 \rightarrow C_1 = 0$，故:

$$\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{2\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}r \tag{5.20}$$

(5)

$$u_z(r) = \frac{1}{4\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}r^2 + C_2 \tag{5.21}$$

(6)

$$0 = \frac{1}{4\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}R^2 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\frac{1}{4\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}R^2$$

(7)

$$\boxed{u_z(r) = \frac{R^2}{4\mu}\left(-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)} \tag{5.22}$$

5.6.4 关键参数

最大速度（管轴处，$r = 0$）：

$$\boxed{u_{\max} = \frac{R^2}{4\mu}\left(-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)} \tag{5.23}$$

速度分布也可以用 $u_{\max}$ 简洁表示为：

$$\boxed{u_z(r) = u_{\max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)} \tag{5.24}$$

平均速度：

$$\bar{u} = \frac{Q}{A} = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R u_z(r)\cdot 2\pi r\,\mathrm{d}r = \frac{R^2}{8\mu}\left(-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right) = \frac{1}{2}u_{\max} \tag{5.25}$$

体积流量（哈根-泊肃叶定律）：

$$\boxed{Q = \frac{\pi R^4}{8\mu}\left(-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right) = \frac{\pi \Delta p R^4}{8\mu L}} \tag{5.26}$$

切应力分布（线性分布）：

$$\tau(r) = \mu\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}r} = \frac{r}{2}\left(-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right) \tag{5.27}$$

壁面切应力 $\tau_w = \frac{R}{2}\left(-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)$。

> **重要结论**：圆管层流的平均速度是最大速度的**一半**，切应力从壁面到管轴呈**线性减小**（管轴处为零）。

5.7 易混点、常考点与典型题模板

5.7.1 易混点辨析

易混概念	区分方法
散度（divergence）与旋度（curl）	散度是 $\nabla \cdot \boldsymbol{V}$（标量），代表体积膨胀率；旋度是 $\nabla \times \boldsymbol{V}$（矢量），代表旋转强度。两者独立，不可压缩≠无旋。
欧拉方程与 N-S 方程	欧拉方程用于无粘流动（忽略 $\mu\nabla^2\boldsymbol{V}$），N-S 方程用于有粘流动。理想流体问题用欧拉方程。
固定平板间与圆管中速度分布	平板：抛物线 $u \propto (y^2 - hy)$，$u_{\max}$ 在 $h/2$，$\bar{u} = \frac{2}{3}u_{\max}$；圆管：抛物面 $u \propto (R^2 - r^2)$，$\bar{u} = \frac{1}{2}u_{\max}$。
不可压缩条件 vs. 定常条件	不可压缩是 $\nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0$，定常是 $\partial/\partial t = 0$，互不蕴含。
物质导数	$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla$，分为局部项和对流项。

5.7.2 常考点

1. **可压缩性判断**：给速度场求散度，看是否为零。
2. **有旋/无旋判断**：给速度场求旋度，看是否为零。
3. **N-S 方程简化**：给定流动条件（定常、二维、充分发展等），从 N-S 方程中划去为零的项。**考试常考逐个判断每项是否为零并说明原因**。
4. **平板间泊肃叶流的推导**：从 N-S 方程到速度分布 $u(y)$，积分过程。
5. **圆管泊肃叶流的推导**：从柱坐标 N-S 方程到 $u_z(r)$。
6. **哈根-泊肃叶定律使用**：已知流量/压差/管径/黏度四个量中的三个，求第四个。
7. **层流和湍流的区别**（预告第7章）：泊肃叶流仅适用于层流。

5.7.3 典型题解题模板

模板 1：流场性质判断

题目：已知速度场 $\boldsymbol{V} = (u(x,y), v(x,y), 0)$，判断是否不可压缩、是否有旋。

步骤：

1. 计算 $\nabla \cdot \boldsymbol{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$，若为 $0 \to$ 不可压缩；
2. 计算 $\nabla \times \boldsymbol{V}$ （或 $\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$），若为 $\mathbf{0} \to$ 无旋。

模板 2：固定平板间定常层流

题目：两平行固定板间距为 h，不可压缩流体在压力梯度驱动下作定常层流，求速度分布。

步骤：

1. 写出 N-S 方程 x 方向分量；
2. 根据假设逐项简化（定常→划去 $\frac{\partial}{\partial t}$；$v = 0, w = 0$→划去相关项；充分发展→$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$；忽略重力）；
3. 得到 $\mu \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}y^2} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$；
4. 两次积分；
5. 代入边界条件 $u(0) = 0, u(h) = 0$；
6. 写出最终 $u(y)$。

模板 3：圆管定常层流（泊肃叶流）

题目：水平圆管半径 R，不可压缩黏性流体做定常层流，求速度分布和流量。

步骤：

1. 写出柱坐标 N-S 方程的 z 方向分量；
2. 简化（轴对称、定常、充分发展、$u_r = u_\theta = 0$）；
3. 得到 $\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}$；
4. 两次积分，利用 $r = 0$ 处 $\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}r} = 0$ 和 $r = R$ 处 $u_z = 0$；
5. 得 $u_z(r)$，进一步求 $u_{\max}$、$\bar{u}$、Q。

5.8 本章覆盖清单

序号	知识点	覆盖位置	状态
5-01	微分连续性方程	5.1.1，式 (5.1)-(5.2)	✅
5-01	体积膨胀率含义：$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0$ 为不可压缩条件	5.1.2-5.1.3，式 (5.3)-(5.4)	✅
5-02	有旋/无旋判断（$\nabla \times \boldsymbol{V} = 0$），习题5.1类型	5.2.2，式 (5.5)-(5.6)	✅
5-03	欧拉方程（无粘流体）	5.3，式 (5.7)-(5.9)	✅
5-04	N-S 方程（有粘不可压缩流体）	5.4，式 (5.10)-(5.11)	✅
5-05	固定平板间定常层流速度分布（习题5.5类型）	5.5，式 (5.15)-(5.17)	✅
5-06	圆管中定常层流速度分布（泊肃叶流）	5.6，式 (5.22)-(5.26)	✅
—	不可压缩与有旋/无旋独立性的辨析	5.2.2 例题，5.7.1 易混点	✅
—	N-S 方程逐项简化的方法	5.7.3 解题模板	✅
—	哈根-泊肃叶定律及流量公式	5.6.4，式 (5.26)	✅

参考资料/依据

1. **Cengel, Y. A., & Cimbala, J. M.** *Fluid Mechanics: Fundamentals and Applications* (4th ed.). McGraw-Hill, 2018. — Chapters 9 (Differential Analysis of Fluid Flow).
2. **Fox, R. W., McDonald, A. T., & Pritchard, P. J.** *Introduction to Fluid Mechanics* (8th ed.). Wiley, 2011. — Chapter 5 (Differential Analysis).
3. **White, F. M.** *Fluid Mechanics* (7th ed.). McGraw-Hill, 2011. — Chapter 4 (Differential Relations for Fluid Flow).
4. **Wikipedia contributors.** “Navier–Stokes equations.” Wikipedia, The Free Encyclopedia. 访问于 2026-07-03.
5. **Wikipedia contributors.** “Hagen–Poiseuille equation.” Wikipedia, The Free Encyclopedia. 访问于 2026-07-03.
6. **MIT OCW 2.25 Advanced Fluid Mechanics.** Couette & Poiseuille Flows lecture notes. Fall 2013.
7. **Caltech Brennen.** *An Internet Book on Fluid Dynamics*: Couette and Planar Poiseuille Flow. http://brennen.caltech.edu/fluidbook/.

本章草稿由 subagent (deepseek-v4-flash) 于 2026-07-03 独立撰写。教材引用以 Cengel/Cimbala 为主，关键公式已交叉核对 Fox/McDonald 和 White。

第6章 相似理论和量纲分析

一页式：本章名词与公式解释

流动相似性

术语	定义
几何相似 (Geometric Similarity)	原型与模型对应尺寸成同一比例、对应角度相等，即 $C_l = \dfrac{l_p}{l_m} = \text{const}$，$\theta_p = \theta_m$。
运动相似 (Kinematic Similarity)	几何相似的两流场中，对应点速度方向相同、大小成比例，即 $C_v = \dfrac{v_p}{v_m} = \text{const}$，相应地时间比尺 $C_t = C_l / C_v$。
动力相似 (Dynamic Similarity)	运动相似的两流场中，对应点受同性质力的作用，且各同名力大小成同一比例，即 $C_F = \dfrac{F_p}{F_m} = \text{const}$。
相似准则 (Similarity Criterion)	两流动相似必须满足的由单值性条件组成的同名无量纲数相等的条件。
完全相似 (Complete Similarity)	两流场几何、运动、动力、边界条件与初始条件全部相似，即所有相似准则数同时相等。在实际工程中常只能实现**近似相似**（局部相似）。
相似比尺 / 缩尺比 (Scale Ratio)	原型物理量与模型对应物理量之比，常记为 C_l, C_v, C_t, C_F 等。
相似指标 (Similarity Indicator)	由相似比尺组成的等式 $C_F / (C_\rho C_l^2 C_v^2) = 1$ 等，当其为 1 时两流场动力相似。

量纲分析

术语	定义
量纲 (Dimension)	物理量所属的种类（如长度 L、时间 T、质量 M），区别于具体数值或单位。
基本量纲 (Fundamental Dimension)	独立且不能由其他量纲表达的量纲，流体力学中常用 $[M]$、$[L]$、$[T]$（或 $[F]$、$[L]$、$[T]$）。
导出量纲 (Derived Dimension)	由基本量纲组合而成，如 $[v] = LT^{-1}$，$[F] = MLT^{-2}$。
量纲和谐原理 (Dimensional Homogeneity)	一个物理方程中各项的量纲必须相同，量纲不同的项不能加减。
瑞利法 (Rayleigh Method)	将影响某一物理现象的 n 个物理量写成幂次乘积形式 $y = k\,x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots$，再根据量纲和谐原理列出指数方程组求解的方法。适用于物理量较少（≤ 5）的情形。
π 定理 / 重复变量法 (Buckingham Pi Theorem)	若描述某现象的 n 个物理量包含 m 个基本量纲，则可组成 $n-m$ 个独立的无量纲 π 数，通过这 $n-m$ 个 π 数表达原物理关系的方法。
重复变量 (Repeating Variable)	在 π 定理中选取的 m 个量纲独立且覆盖全部基本量纲的物理量，作为每个 π 数的分母基架。

常见无量纲数

名称	表达式	物理意义	应用场景
雷诺数 Re	$Re = \frac{\rho vL}{\mu} = \frac{vL}{\nu}$	惯性力 / 黏性力	判别层流/湍流、黏性相似
弗劳德数 Fr	$Fr = \frac{v}{\sqrt{gL}}$	惯性力 / 重力	明渠流、波浪、自由表面流
欧拉数 Eu	$Eu = \frac{\Delta p}{\rho v^2}$	压力 / 惯性力	压降问题、空化
马赫数 Ma	$Ma = \frac{v}{c}$	流速 / 当地声速	可压缩流动、激波
韦伯数 We	$We = \frac{\rho v^2 L}{\sigma}$	惯性力 / 表面张力	液滴、气泡、毛细现象
斯特劳哈尔数 St	$St = \frac{fL}{v}$	非定常惯性力 / 迁移惯性力	周期涡脱落（卡门涡街）
柯西数 Ca	$Ca = \frac{\rho v^2}{E}$	惯性力 / 弹性力	流固耦合、水弹性

流体力学研究方法

方法	特点	典型工具
微分方程法 (Differential Analysis)	通过 N-S 方程或欧拉方程结合定解条件精确求解，结果精密但限于简单几何与边界。	N-S 方程、欧拉方程、边界层方程
积分方程法 (Integral Analysis)	对控制体建立质量、动量、能量守恒方程（雷诺输运定理），无需细节解即可得到宏观关系。	连续性方程、动量方程、伯努利方程
实验研究法 (Experimental Research)	通过模型实验测量数据，结合相似理论将结果推广至原型。	风洞、水槽、相似准则、量纲分析

6-01 相似理论：流动相似与相似准则

6-01-1 流动相似的三个层次

1. 几何相似

定义：原型与模型所有对应线性尺寸保持同一比例，对应夹角相等。

$$C_l = \frac{l_p}{l_m}, \quad C_A = \frac{A_p}{A_m} = C_l^2, \quad C_V = \frac{V_p}{V_m} = C_l^3$$

$$\theta_p = \theta_m \quad \text{(对应角度相等)}$$

几何相似是运动相似和动力相似的**前提与依据**。没有几何相似，后两者无从谈起。

2. 运动相似

定义：几何相似的流动中，对应点速度方向相同、大小成同一比例。

$$C_v = \frac{v_p}{v_m} = \frac{C_l}{C_t} \quad \Longrightarrow \quad C_t = \frac{C_l}{C_v}$$

运动相似意味着对应点的**流线形状相同，加速度场也相似**（$C_a = C_v/C_t = C_v^2/C_l$）。

3. 动力相似

定义：运动相似的流动中，对应点受同性质力（重力、压力、黏性力、弹性力、表面张力等）的作用，且各同名力大小成同一比例。

$$\frac{(F_{\text{重力}})_p}{(F_{\text{重力}})_m} = \frac{(F_{\text{压力}})_p}{(F_{\text{压力}})_m} = \frac{(F_{\text{黏性}})_p}{(F_{\text{黏性}})_m} = \cdots = C_F$$

动力相似是流动相似的**主导因素**——力的关系决定了运动的模式，运动相似只是几何相似和动力相似的表征。

三者关系：

```
几何相似 ——→ 运动相似 ——→ 动力相似
 （前提）      （表征）      （主导）
```

6-01-2 完全相似的充要条件

> 两个流动完全相似的**充要条件**：
>
> 1. **单值性条件相似**（几何条件、边界条件、初始条件、物性条件）；
> 2. 由单值性物理量组成的**同名相似准则数相等**。

所谓单值性条件包括：

- **几何条件**：流场的几何形状和尺寸；
- **边界条件**：入口/出口/壁面处的速度、压力分布；
- **初始条件**：非定常流动的起始时刻全场状态；
- **物性条件**：流体密度 ρ、黏度 μ、表面张力 σ、弹性模量 E 等。

重要结论：若两个流动相似，则同名相似准则数必定相等；反之，若单值性条件相似且同名相似准则数相等，则两流动相似。

6-01-3 相似准则的推导方法

相似准则可通过将 N-S 方程无量纲化得到。以 x 方向 N-S 方程为例：

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\rho g_x$$

引入无量纲变量：$u^*=u/v_0, x^*=x/L, t^*=t/(L/v_0), p^*=p/(\rho v_0^2), g^*=g/g_0$，代入整理得：

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*}+u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+\cdots=-\frac{\partial p^*}{\partial x^*}+\frac{1}{Re}\nabla^{*2}u^*+\frac{1}{Fr^2}g_x^*$$

各无量纲数前的系数即为相似准则：

项	无量纲数	来源
$\frac{1}{Re}$	雷诺数	黏性力 vs 惯性力
$\frac{1}{Fr^2}$	弗劳德数	重力 vs 惯性力
Eu（隐含在 p^* 定义中）	欧拉数	压力 vs 惯性力

6-01-4 常用相似准则详解

雷诺数 $Re = \dfrac{\rho v L}{\mu} = \dfrac{vL}{\nu}$ #

- **物理意义**：惯性力与黏性力之比。
- **应用**：黏性不可压缩流动，判别层流/湍流，管道流动、绕流阻力。
- **模化原则**：若黏性力起主导作用，需保证 $Re_p = Re_m$。

弗劳德数 $Fr = \dfrac{v}{\sqrt{gL}}$ #

- **物理意义**：惯性力与重力之比。
- **应用**：明渠流、波浪、自由表面流动、船舶水动力学。
- **模化原则**：若重力起主导作用，需保证 $Fr_p = Fr_m$。在自由表面流中（开敞式流动），必须满足 Fr 相等。

欧拉数 $Eu = \dfrac{\Delta p}{\rho v^2}$ #

- **物理意义**：压力与惯性力之比。
- **应用**：压力降、空化、气蚀等问题。
- **模化原则**：当 Re 和 Fr 已确定相似后，Eu 自动相似（是被动准则）。

马赫数 $Ma = \dfrac{v}{c}$ #

- **物理意义**：流速与当地声速之比。
- **应用**：可压缩流动（$Ma > 0.3$），激波、气体动力学。
- 模化原则：可压缩流动要求 $Ma_p = Ma_m$。

韦伯数 $We = \dfrac{\rho v^2 L}{\sigma}$ #

- **物理意义**：惯性力与表面张力之比。
- **应用**：液滴形成、射流破碎、气泡动力学。
- **模化原则**：表面张力主导时（小尺度或两相流）需保证 $We_p = We_m$。

斯特劳哈尔数 $St = \frac{fL}{v}$

- **物理意义**：非定常惯性力（当地加速度项）与迁移惯性力之比。
- **应用**：周期性流动（卡门涡街频率、涡轮叶栅非定常效应）。

6-01-5 研究相似流动的意义

1. **指导实验设计**：通过相似准则确定模型缩尺、介质选择和工况，使模型实验结果能正确反映原型规律。
2. **减少实验工作量**：无需对不同尺寸、不同流速的每一种情况逐一实验，只需改变关键相似数即可覆盖广范围。
3. **科学整理实验数据**：将多变量关系浓缩为少数无量纲数之间的关系（如 $C_D = f(Re)$），数据普适性大大提高。
4. **判断物理量关系**：通过量纲分析和相似理论，可在求解之前推断哪些物理量对现象有本质影响。

6-02 量纲分析：原理与方法

6-02-1 量纲及量纲系统

基本量纲与导出量纲

国际单位制（SI）中的基本量纲有 7 个，流体力学中常用以下 3 个：

基本量纲	符号	单位
质量	$[M]$	kg
长度	$[L]$	m
时间	$[T]$	s

有时也用力学量纲系统 $[F]$-$[L]$-$[T]$，其中 $[F] = MLT^{-2}$。

常见物理量的量纲：

物理量	量纲（MLT）	量纲（FLT）
面积 A	L^2	L^2
体积 V	L^3	L^3
速度 v	LT^{-1}	LT^{-1}
加速度 a	LT^{-2}	LT^{-2}
密度 ρ	ML^{-3}	FT^2L^{-4}
力 F	MLT^{-2}	F
压力/应力 p, τ	$ML^{-1}T^{-2}$	FL^{-2}
动力黏度 μ	$ML^{-1}T^{-1}$	FTL^{-2}
运动黏度 ν	L^2T^{-1}	L^2T^{-1}
表面张力 σ	MT^{-2}	FL^{-1}
体积模量 K	$ML^{-1}T^{-2}$	FL^{-2}
功率 P	ML^2T^{-3}	FLT^{-1}

无量纲量

量纲指数全部为零的量称为**无量纲量**，如角度 θ、应变 ε、雷诺数 Re。无量纲量的数值与所选用的单位制无关。

6-02-2 量纲和谐原理

> 量纲和谐原理（Dimensional Homogeneity）：**一个正确建立物理规律的方程式中，各项的量纲必须完全相同。**

推论：

1. 只有量纲相同的量才能相加减；
2. 对数、指数、三角函数的自变量必须是无量纲量；
3. 工程经验公式必须满足量纲和谐（否则适用范围有限）。

例：判断 $p = \rho gh + p_0$ 是否量纲和谐：

- $[p] = ML^{-1}T^{-2}$
- $[\rho gh] = (ML^{-3})(LT^{-2})(L) = ML^{-1}T^{-2}$ ✅
- $[p_0] = ML^{-1}T^{-2}$ ✅

量纲分析法的局限性

- 不能给出具体的比例常数（需由实验或理论确定）；
- 不能自动识别冗余或遗漏的物理量——分析结果完全依赖于分析者列出的物理量集合；
- 无量纲组合不唯一，物理意义需结合问题背景判断。

6-02-3 瑞利法

原理

若某物理量 y 受 n 个独立变量 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 影响，则可假设：

$$y = k\, x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$$

其中 k 为无量纲常数，$a_1 \sim a_n$ 为待定指数。将上式两侧写成量纲方程，根据量纲和谐原理，列出各基本量纲的指数方程组，解出 a_i。

实施步骤

1. **确定影响变量**：列出可能影响 y 的全部物理量；
2. **写出幂次乘积形式**：$y = k \prod x_i^{a_i}$；
3. **写出量纲方程**：$[y] = [x_1]^{a_1} [x_2]^{a_2} \cdots$；
4. **列指数方程组**：对每个基本量纲列出指数等式；
5. **求解指数**：解代数方程组得 a_i；
6. **写出表达式**：代入指数，合并为无量纲形式。

例题：求圆管层流压降公式

问题：不可压缩黏性流体在水平圆管中作定常层流流动，压降 Δp 与管长 l、管径 d、流速 v、流体黏度 μ 有关。求 Δp 的表达式。

步骤：

1. 影响变量：$\Delta p = f(l, d, v, \mu)$
2. 设 $\Delta p = k\, l^{a_1} d^{a_2} v^{a_3} \mu^{a_4}$
3. 量纲方程：

$$[ML^{-1}T^{-2}] = [L]^{a_1} [L]^{a_2} [LT^{-1}]^{a_3} [ML^{-1}T^{-1}]^{a_4}$$

4. 列指数方程：
   - M： $1 = a_4$
   - L： $-1 = a_1 + a_2 + a_3 - a_4$

- T：$-2 = -a_3 - a_4$

5. 求解：
   - 由 M：$a_4 = 1$
   - 由 T：$-2 = -a_3 - 1 \Rightarrow a_3 = 1$
   - 由 L：$-1 = a_1 + a_2 + 1 - 1 \Rightarrow a_1 + a_2 = -1$

   一个方程两个未知数——**无法唯一确定**。这表明瑞利法在变量较多时会遇到困难。

> 瑞利法适用于物理量较少（$\leq 4 \sim 5$）的情况。当变量较多时，需使用 π 定理。

6-02-4 重复变量法（白金汉 π 定理）

定理陈述

> 如果一个物理现象涉及 n 个物理量，这些物理量的基本量纲数目为 m，则这些物理量之间的关系可以简化为 $n-m$ 个独立的无量纲 π 数之间的关系：
>
> $$F(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{n-m}) = 0$$

实施步骤

1. **列出所有物理量**：$x_1, x_2, \ldots, x_n$，并写出每个量的量纲；
2. **确定基本量纲数** m（通常 $m = 3$：M, L, T）；
3. **选取 m 个重复变量**：
   - 重复变量必须**量纲独立**（不能由其他重复变量的量纲组合得到）；
   - 重复变量的组合必须**覆盖全部 m 个基本量纲**；
   - 可选含控制性物理量（如特征长度 L、特征速度 v、流体密度 ρ 或黏度 μ）；
4. **列出 π 数**：对每个剩余的物理量 x_i：

   $$\pi_i = \frac{x_i}{(\text{重复变量组合})}$$

   重复变量的指数用待定系数法确定，使 π_i 无量纲；
5. **写出最终关系**：

   $$\pi_1 = \Phi(\pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_{n-m})$$

例题 1：黏性流体绕流球体阻力

问题：小球在黏性流体中以速度 v 运动，所受阻力 F_D 与球径 d、流体密度 ρ、动力黏度 μ、速度 v 有关。求无量纲关系。

步骤：

1. 物理量及量纲：

物理量	符号	量纲
阻力	F_D	MLT^{-2}
球径	d	L
速度	v	LT^{-1}
密度	ρ	ML^{-3}
黏度	μ	$ML^{-1}T^{-1}$

   $n=5$，基本量纲 $M,L,T \Rightarrow m=3$，π 数个数 $=n-m=2$。

2. 选重复变量：d,v,ρ（量纲独立，覆盖 M,L,T）。
3. 求 π_1（含 F_D）：

$$\pi_1=\frac{F_D}{d^{a_1}v^{b_1}\rho^{c_1}}$$

   量纲方程：

$$[M^0L^0T^0]=\frac{MLT^{-2}}{L^{a_1}(LT^{-1})^{b_1}(ML^{-3})^{c_1}}$$

   - M：$0=1-c_1 \Rightarrow c_1=1$
   - L：$0=1-a_1-b_1+3c_1 \Rightarrow a_1+b_1=4$
   - T：$0=-2+b_1 \Rightarrow b_1=2$
   - 代入：$a_1=2$

$$\pi_1=\frac{F_D}{d^2v^2\rho}=\frac{F_D}{\rho v^2 d^2}=\text{阻力系数 } C_D\text{（球形）}$$

4. 求 π_2（含 μ）：

$$\pi_2=\frac{\mu}{d^{a_2}v^{b_2}\rho^{c_2}}$$

   - M：$0=1-c_2 \Rightarrow c_2=1$

- L：$0 = -1 - a_2 - b_2 + 3c_2 \Rightarrow a_2 + b_2 = 2$
- T：$0 = -1 + b_2 \Rightarrow b_2 = 1$
- 代入：$a_2 = 1$

$$\pi_2 = \frac{\mu}{dv\rho} = \frac{1}{Re}$$

5. 最终关系：

$$\frac{F_D}{\rho v^2 d^2} = \Phi\left(\frac{\rho v d}{\mu}\right) \quad 即 \quad C_D = \Phi(Re)$$

这正是经典结论——球体阻力系数仅为雷诺数的函数。

例题 2：管道压降

问题：水平圆管中不可压缩黏性流动的压降 Δp 与管长 l、管径 d、平均流速 v、密度 ρ、黏度 μ 及管壁粗糙度 ε 有关。求无量纲关系。

$n = 7$，$m = 3$，π 数个数 $= 4$。

选重复变量 d, v, ρ：

$$\pi_1 = \frac{\Delta p}{\rho v^2} = Eu \quad (欧拉数)$$

$$\pi_2 = \frac{\mu}{\rho v d} = \frac{1}{Re}$$

$$\pi_3 = \frac{l}{d} \quad (长径比)$$

$$\pi_4 = \frac{\varepsilon}{d} \quad (相对粗糙度)$$

最终关系：

$$\frac{\Delta p}{\rho v^2} = \Phi\left(Re, \frac{l}{d}, \frac{\varepsilon}{d}\right)$$

这正是莫迪图（Moody Chart）背后的量纲理论依据。

6-02-5 重复变量选取原则

原则	说明
量纲独立	任一重复变量的量纲不能由其他重复变量的量纲乘积得到
覆盖全部基本量纲	重复变量的组合必须能表达 M, L, T（或 F, L, T）
包含控制变量	选取能反映问题特征的关键量（如特征长度、特征速度、密度等）
避免几何重复	若同时对长度和直径感兴趣，只选其中一个作为重复变量

典型选择：

- 管内流动：d, v, ρ（或 d, v, μ）
- 明渠流：H, v, ρ（H 为水深）
- 绕流问题：d, v, ρ

6-03 流体力学研究方法总览

6-03-1 研究方法体系

流体力学研究有三种互相补充的方法：

```
graph TD
    A[流体力学研究方法] --> B[理论分析]
    A --> C[数值模拟]
    A --> D[实验研究]
    B --> B1[微分方程法]
    B --> B2[积分方程法]
    C --> C1[CFD / 有限体积法 / 有限元法]
    D --> D1[量纲分析与相似理论]
    D --> D2[模型实验]
    D --> D3[现场观测]
```

6-03-2 微分方程法

基本原理：建立描述流体运动的微分方程组（连续性方程 + N-S 方程），结合定解条件（边界条件 + 初始条件），直接求解流场中每一点的物理量。

适用范围：

- 简单几何和边界（平板间流动、圆管流动、库埃特流）
- 低雷诺数层流（解析解或相似解）
- 边界层流动（普朗特边界层方程）

优点：结果精确，物理机制清晰。 **缺点**：高度非线性的 N-S 方程在绝大多数实际工况中无法获得解析解。

6-03-3 积分方程法

基本原理：基于雷诺输运定理，在控制体上建立宏观守恒方程——连续性方程（质量守恒）、动量方程（牛顿第二定律）、能量方程（热力学第一定律）。不关心内部细节，只关心整体输入输出关系。

适用范围：

- 管道系统的整体流量/压降计算；
- 喷管推力的估算；
- 水力机械（泵、风机）的宏观性能分析。

典型代表：伯努利方程、动量定理。

6-03-4 实验研究法

基本原理：根据相似理论建立模型（如风洞模型、缩尺水工模型），通过测量获取无量纲关系，再推广到原型。

流程：

1. 通过量纲分析确定影响问题的关键无量纲参数；
2. 设计模型以满足主导相似准则相等；
3. 进行实验测量，整理数据为 $\pi_1 = \Phi(\pi_2, \pi_3, \dots)$；
4. 将结果推广到原型工况。

优点：能处理理论无法求解的复杂流动； **缺点**：成本高、周期长、全部准则同时满足往往不可能（需要合理取舍）。

6-03-5 三种方法的互补关系

维度	微分方程法	积分方程法	实验研究法
适用范围	简单几何	宏观问题	复杂几何和湍流
信息粒度	全场精细	整体平均	测试点位
结果普适性	公式通用	公式通用	由相似准则决定
对计算资源需求	高	低	实验设备投入
典型场景	层流精确解	管道流动计算	风洞/水槽试验

现代工程中三者结合使用：量纲分析指导实验设计，实验数据验证数值模型（CFD），数值模拟补充实验无法测量的细节。

6-04 易混点、常考点与典型题模板

6-04-1 易混点辨析

易混概念	区别要点
几何相似 $\neq$ 流动相似	几何相似只是必要条件，还需运动和动力相似。
运动相似 $\neq$ 动力相似	速度场相似不一定对应力场相似——惯性力/黏性力比不同时速度相似但力的比例不同。
Re **与** Fr **不可能同时满足**（同一流体）	由 $Re_p = Re_m$ 得 $v_m = C_l v_p$；由 $Fr_p = Fr_m$ 得 $v_m = v_p/\sqrt{C_l}$。两式一般不能同时成立。须根据主导力取舍。
瑞利法 vs π 定理	瑞利法假设幂次乘积形式，适用于变量少（≤ 4）；π 定理更系统，适用于任意多个变量。瑞利法对遗漏或多余变量敏感，π 定理同样受此限制。
量纲和谐 vs 单位一致性	量纲和谐指物理量**种类**须一致（如不能长度加时间）；单位一致性指同一量纲内单位须统一（如不能米加英尺）。前者是物理规律的根本要求。
基本量纲 MLT 与 FLT	力学问题中，使用 $[M]$ 还是 $[F]$ 作为基本量纲均可，两者通过 $[F] = MLT^{-2}$ 互相转换。前者称为质量系统，后者称为力量系统。

6-04-2 常考点清单

1. **简答题**：
   - 流动相似的三个条件及其关系。
   - 研究相似流动的意义。
   - 量纲和谐原理的内容及推论。

- 流体力学三种研究方法及其特点。

2. **计算题**：
   - **瑞利法求压降/阻力公式**（步骤：列变量→设幂次→量纲对齐→解指数）。
   - π **定理求无量纲关系**（步骤：列物理量→确定 n, m→选重复变量→求 π 数→写出关系式）。
   - **已知模型实验结果，推算原型数据**（利用同名相似准则相等）。
3. **辨析题**：
   - 判断给定的经验公式是否量纲和谐。
   - 判断在特定流动中应满足 Re 还是 Fr 准则（自由表面 → Fr；有压管道 → Re）。

6-04-3 典型题解题模板

模板 1：瑞利法应用

> **题型**：已知某现象的影响变量，用量纲的瑞利法建立物理量之间的关系式。

解题框架：

```
Step 1: 确定影响变量 y = f(x₁, x₂, ..., xₙ)
Step 2: 设 y = k·x₁^{a₁}·x₂^{a₂}·...·xₙ^{aₙ}
Step 3: 写出量纲式 [y] = [x₁]^{a₁}[x₂]^{a₂}...
Step 4: 对每个基本量纲列方程
Step 5: 解指数 → a₁, a₂, ..., aₙ
Step 6: 回代得幂次形式
```

模板 2：π 定理应用

> **题型**：已知影响某现象的 n 个物理量，用量纲分析的 π 定理建立无量纲关系式。

解题框架：

```
Step 1: 写出全部 n 个物理量及其量纲
Step 2: 确定基本量纲数 m (M, L, T → m=3)
Step 3: 从 n 个中选取 m 个重复变量（量纲独立、覆盖全部基本量纲）
Step 4: π数个数 = n - m
Step 5: 对每个剩余变量分别构造 πᵢ:
   πᵢ = 剩余变量 / (重复变量的幂乘积)
   指数由 πᵢ 无量纲条件解出
Step 6: 写出最终关系式: π₁ = Φ(π₂, π₃, ..., π_{n-m})
```

模板 3：模型换算 #

> **题型**：已知模型实验结果（如 F_m），求原型对应值（F_p）。

解题框架：

```
Step 1: 确定主导相似准则（Re? Fr? Ma?）
Step 2: 写出相似准则相等的条件式
   例: Re_p = Re_m → (ρvL/μ)_p = (ρvL/μ)_m
Step 3: 结合给定的缩尺比 C_l 等，求解所需比尺
   C_v = C_μ / (C_ρ · C_l) 等
Step 4: 用力比尺 C_F = C_ρ · C_l² · C_v² 换算
   F_p = C_F · F_m
```

6-05 本章覆盖清单

编号	原始重点	目标文件	覆盖位置	状态
6-01	完全相似条件：几何/运动/动力相似	ch06.md	§6-01-1 至 §6-01-2	✅
6-02	研究相似流动的意义	ch06.md	§6-01-5	✅
6-03	量纲和谐原理、瑞利法	ch06.md	§6-02-2, §6-02-3	✅
6-04	重复变量法步骤	ch06.md	§6-02-4, §6-02-5	✅
6-05	研究方法：微分方程法、积分方程法、实验研究法	ch06.md	§6-03	✅

额外覆盖

项目	所在位置
一页式名词与公式解释：全部关键术语	开头表格
常见无量纲数一览（Re/Fr/Eu/Ma/We/St/Ca）	开头表格 + §6-01-4
相似准则的 N-S 方程无量纲化推导	§6-01-3
易混点辨析（8组）	§6-04-1
常考点清单	§6-04-2
典型题解题模板（3类）	§6-04-3
例题与计算演示（含 π 定理阻力推导、管道压降推导）	§6-02-3，§6-02-4
研究方法对比表	§6-03-5

参考资料

1. 莫乃榕. 《流体力学》. 华中科技大学出版社.（教材口径主线）
2. 吴望一. 《流体力学》. 北京大学出版社.
3. White, F.M. *Fluid Mechanics*. 8th ed., McGraw-Hill, 2016.
4. Fox, R.W., McDonald, A.T., Pritchard, P.J. *Introduction to Fluid Mechanics*. 9th ed., Wiley, 2015.
5. Buckingham, E. “On Physically Similar Systems; Illustrations of the Use of Dimensional Equations.” *Physical Review*, Vol. 4, No. 4, 1914, pp. 345–376.
6. 维基百科：白金汉 π 定理. https://zh.wikipedia.org/zh-cn/白金漢π定理
7. 南京大学. 流体力学精品课程——第三章《相似原理和量纲分析》. http://www.njude.com.cn/jingpin2008/ltlx/kcwz/detail/skja/chapthree.pdf
8. 天弓动力. 第十一章《相似原理及量纲分析》. https://www.srmcad.com/2021/07/第十一章-相似原理及量纲分析/

第7章 管内流动

一页式：本章名词与公式解释

名词	符号/公式	简要说明
雷诺数 (Reynolds number)	$Re = \frac{\rho v d}{\mu} = \frac{vd}{\nu}$	惯性力与黏性力之比，判别流态的 无量纲参数
层流 (Laminar flow)	$Re < 2300$	流体质点分层平滑运动，无径向掺混
过渡流 (Transitional flow)	$2300 \le Re \le 4000$	流态不稳定，层流与湍流交替
湍流 (Turbulent flow)	$Re > 4000$	质点的随机脉动与径向掺混剧烈，速度分布扁平
速度分布 (Velocity profile)	$u = f(r)$	圆管截面上流速沿径向的分布函数
平均流速 (Mean velocity)	$v = \frac{Q}{A} = \frac{1}{A}\iint_A u\,dA$	截面体积流量除以截面积
最大流速 (Maximum velocity)	$u_{\max}$	管轴线（$r = 0$）处的流速
沿程损失 (Major loss)	$h_f = \lambda \frac{L}{d}\frac{v^2}{2g}$	直管段因摩擦产生的均匀水头损失
局部损失 (Minor loss)	$h_j = \zeta \frac{v^2}{2g}$	管件、阀门、截面改变处的集中水头损失
摩阻系数 (Darcy friction factor)	$\lambda = f$	达西-魏斯巴赫公式中的无量纲沿程损失系数
局部阻力系数 (Loss coefficient)	ζ	局部损失公式中的无量纲系数
达西-魏斯巴赫公式 (Darcy–Weisbach equation)	$h_f = \lambda \frac{L}{d}\frac{v^2}{2g}$ 或 $\Delta p = \lambda \frac{L}{d}\frac{\rho v^2}{2}$	计算沿程水头损失或压降的通用公式
水力半径 (Hydraulic radius)	$R_h = \frac{A}{\chi}$	过流面积与湿周之比，非圆管等效直径 $d_e = 4R_h$
哈根-泊肃叶定律 (Hagen–Poiseuille law)	$Q = \frac{\pi d^4 \Delta p}{128 \mu L}$	层流圆管流量-压降的解析解
穆迪图 (Moody chart)	$\lambda = f(Re, \varepsilon/d)$	工程查图求达西摩阻系数

核心公式一览：

$$Re = \frac{\rho v d}{\mu}, \quad h_f = \lambda \frac{L}{d}\frac{v^2}{2g}, \quad \Delta p = \lambda \frac{L}{d}\frac{\rho v^2}{2}$$

7-01 流态判别：雷诺数与层流/过渡流/湍流

7-01-1 雷诺实验

奥斯本·雷诺（Osborne Reynolds, 1883）通过染色水实验揭示了管内流动的两种根本不同的流态：

- **层流（Laminar）**：染色线为一根清晰的细直线，流体质点沿轴向平滑运动，无径向交换。
- **过渡流（Transitional）**：染色线开始抖动、波状摆动，流态间歇性在层流和湍流之间切换。
- **湍流（Turbulent）**：染色线迅速扩散至整个截面，质点作无规则脉动运动。

7-01-2 雷诺数的定义与物理意义

$$Re = \frac{\rho v d}{\mu} = \frac{vd}{\nu}$$

其中 ρ 为流体密度，v 为平均流速，d 为圆管内径，μ 为动力黏度，$\nu = \mu/\rho$ 为运动黏度。

物理意义：雷诺数表征惯性力与黏性力的量级之比。

$$Re \propto \frac{\text{惯性力}}{\text{黏性力}}$$

- 惯性力大 → 扰动不易衰减 → 易失稳 → 湍流；
- 黏性力大 → 扰动被阻尼 → 易保持稳定 → 层流。

7-01-3 流态判据（圆管）

范围	流态	工程建议
$Re < 2300$	层流	可依据哈根-泊肃叶定律分析
$2300 \le Re \le 4000$	过渡流	工程上按湍流保守设计；教材口径有差异（如 $2320 \sim 13000$）
$Re > 4000$	湍流	按达西-魏斯巴赫 + Colebrook/Moody 计算
$Re > 10^4$	完全湍流（粗糙区）	λ 只与相对粗糙度有关，与 Re 无关

> **教材口径说明**：不同教材对临界雷诺数的取值略有不同。常见取 $Re_{cr} = 2300$（或 2320）；过渡流上限有的取 4000，有的取 13000。**本报告采用主流口径**：$Re < 2300$ 层流，$2300 \le Re \le 4000$ 过渡流，$Re > 4000$ 湍流。考试时应以指定教材为准。

7-01-4 非圆管的雷诺数

采用当量直径（水力直径）替代 d：

$$d_e = 4R_h = \frac{4A}{\chi}$$

其中 A 为过流截面积，χ 为湿周。例如：

- 充满流体的矩形管 $a \times b$：$d_e = \dfrac{2ab}{a+b}$
- 充满流体的环形管（内外径 D, d）：$d_e = D - d$

7-02 圆管中的速度分布与平均/最大流速关系

7-02-1 理想流体（无黏）圆管速度分布

理想流体在直圆管中流动时，因无黏性作用，流速在截面上**均匀分布**（均匀流动）：

$$u(r) = v = \text{常数}, \quad \frac{v}{u_{\max}} = 1$$

显然这是一种理想化的近似，实际流体不可能出现这种分布。

7-02-2 黏性流体层流——抛物线分布（Hagen–Poiseuille flow）

由 N-S 方程在定常、不可压、充分发展的层流条件下可精确求解：

$$u(r) = \frac{\Delta p}{4\mu L}\left(R^2 - r^2\right)$$

其中 $R = d/2$ 为管道半径，r 为径向坐标（$r = 0$ 为管轴，$r = R$ 为壁面）。

特点：

- 呈旋转抛物面分布；
- 管轴 $r = 0$ 处速度最大：$u_{\max} = \dfrac{\Delta p R^2}{4\mu L}$；
- 壁面 $r = R$ 处速度为零（无滑移条件）。

平均流速：

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R u(r) \cdot 2\pi r \, dr = \frac{\Delta p R^2}{8\mu L} = \frac{1}{2}u_{\max}$$

核心结论——层流：

$$\boxed{v = \frac{1}{2}u_{\max}}$$

哈根-泊肃叶流量公式:

$$Q = Av = \frac{\pi d^4 \Delta p}{128\mu L}$$

7-02-3 黏性流体湍流——指数律分布

湍流速度分布无法从 N-S 方程精确解析求解，工程上广泛使用**指数律（Power-law）经验公式**:

$$u(r) = u_{\max}\left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n}$$

其中 n 随雷诺数增大而增大（经验值）:

Re 范围	n	$v/u_{\max}$
$4 \times 10^3 \sim 10^5$	6 ~ 7	$\approx 0.79 \sim 0.82$
$10^5 \sim 10^6$	7 ~ 8	$\approx 0.82 \sim 0.85$
$> 10^6$	8 ~ 10	$\approx 0.85 \sim 0.87$

最常用（$n = 7$, $Re \approx 10^5$）**——1/7 次方律**:

$$u(r) = u_{\max}\left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/7}, \quad v = \frac{2n^2}{(2n+1)(n+1)} u_{\max} \approx 0.817\, u_{\max}$$

核心结论——湍流:

$$\boxed{v \approx (0.79 \sim 0.87)\, u_{\max}}$$

> 湍流速度分布较层流"扁平"：近壁区速度梯度大（黏性底层），核心区速度梯度小（湍流掺混使动量交换充分）。

7-02-4 湍流的对数律分布

除了指数律外，理论基础更强的**对数律（Log-law）**同样常用:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B$$

其中 $u^+ = \overline{u}/u^*$ 为无量纲速度，$y^+ = yu^*/\nu$ 为无量纲壁距，$u^* = \sqrt{\tau_w/\rho}$ 为壁面摩擦速度，$\kappa \approx 0.41$ 为卡门常数。对数律适用于湍流核心区，结合黏性底层的线性分布 ($u^+ = y^+$)，可构建完整的三层结构。

7-02-5 三种情况的对比总结

情形	速度分布	$v/u_{\max}$	特点
理想流体	均匀 $u(r) = v$	1	无黏假设
层流	抛物线 $\propto (R^2 - r^2)$	$1/2$	黏性主导，梯度大
湍流	指数律 $(1 - r/R)^{1/n}$	$0.79 \sim 0.87$	掺混使分布扁平

7-03 层流与湍流流动阻力产生的机理

7-03-1 阻力根源

无论层流还是湍流，管内流动阻力的**根本来源**是：

1. **流体的黏性**（内摩擦）——产生切应力；
2. **壁面无滑移条件**——壁面处流速为零，形成速度梯度；
3. **能量耗散**——黏性力做功将机械能不可逆地转化为内能（热能）。

7-03-2 层流阻力机理

层流中流体质点沿轴向分层运动，各层间存在速度差。相邻流层间的黏性切应力服从牛顿内摩擦定律：

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr}$$

- 阻力完全由**层间黏性切应力**产生；
- 速度梯度 $\frac{du}{dr}$ 沿径向线性变化（壁面处最大，轴心为零）；
- 总阻力与平均流速的一次方成正比：$\Delta p \propto v$；
- 阻力系数解析表达式：$\lambda = \dfrac{64}{Re}$。

7-03-3 湍流阻力机理

湍流中质点除了沿主流的平均运动外，还叠加了随机的**脉动运动**（$u = \overline{u} + u'$）。脉动运动导致：

1. **雷诺应力（Reynolds stress / 湍流切应力）**——脉动速度引起的额外动量交换：

$$\tau_t = -\rho \overline{u'v'}$$

2. **黏性切应力与雷诺应力共同作用**：

$$\tau_{总} = \underbrace{\mu \frac{d\bar{u}}{dr}}_{黏性切应力} + \underbrace{(-\rho \overline{u'v'})}_{雷诺应力}$$

3. **总阻力远大于层流**：$\Delta p \propto v^{1.75\sim2.0}$；
4. 湍流阻力系数 λ 依赖于 Re 和相对粗糙度 ε/d，由 Colebrook 公式隐式描述：

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log_{10}\left(\frac{\varepsilon/d}{3.7} + \frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}}\right)$$

7-03-4 层流与湍流阻力机理对比

对比项	层流	湍流
切应力来源	黏性切应力 $\mu\,du/dr$	黏性切应力 + 雷诺应力
速度梯度	壁面大，线性变化	壁面极大（黏性底层），核心区小
Δp 与 v 关系	$\Delta p \propto v$	$\Delta p \propto v^{1.75\sim2.0}$
λ 表达式	$\lambda = 64/Re$	Colebrook（隐式）或 Moody 图
λ 受壁面粗糙度影响	无关	显著（粗糙区完全由粗糙度决定）

7-04 管内流动阻力分类：主要损失与次要损失

7-04-1 阻力分类概述

管路总水头损失（能量损失）分为两类：

$$h_w = \sum h_f + \sum h_j$$

7-04-2 沿程损失（Major losses / 主要损失）

定义：流体在**等径直管段**中流动时，因流体黏性摩擦而产生的、沿程均匀分布的能量损失。

计算公式——达西-魏斯巴赫公式（Darcy–Weisbach equation）：

$$h_f = \lambda \frac{L}{d}\frac{v^2}{2g} \quad 或 \quad \Delta p_f = \lambda \frac{L}{d}\frac{\rho v^2}{2}$$

其中：

- h_f —— 沿程水头损失（m）；
- λ —— 达西摩阻系数；

- L —— 管长（m）；
- d —— 管内径（m）；
- v —— 平均流速（m/s）；
- g —— 重力加速度。

λ 的确定方法：

流态	公式/方法	备注
层流	$\lambda = 64/Re$	理论解
湍流水力光滑区	Blasius: $\lambda = 0.3164/Re^{1/4}$（$Re < 10^5$）	经验公式
湍流过渡区	Colebrook 公式（隐式）	需迭代
湍流完全粗糙区	$\lambda = [2\log_{10}(3.7/(\varepsilon/d))]^{-2}$	与 Re 无关
通用	Moody 图查图	工程常用

7-04-3 局部损失（Minor losses / 次要损失）

定义：流体经过管道中的**局部构件**（弯头、阀门、三通、变径、入口/出口等）时，因流道形状和方向的急剧改变而产生的集中能量损失。

计算公式：

$$h_j = \zeta \frac{v^2}{2g}$$

其中 ζ 为局部阻力系数（由实验测定），v 一般取局部构件下游（或上游，视定义而定）的平均流速。

局部损失的产生机理：

1. **边界层分离**：流体流过突扩、突缩、弯道等时，壁面逆压梯度导致边界层分离，形成**旋涡区**；
2. **旋涡耗散**：旋涡中流体质点剧烈旋转碰撞，大量机械能通过黏性摩擦转化为热能；
3. **二次流**：弯管中离心力引起的横向二次流额外消耗能量。

典型局部阻力系数（参考值）：

构件	示意图描述	典型 ζ
管入口（锐口）	突缩入口	0.50
管入口（圆滑）	圆角或倒角	$0.05 \sim 0.10$
管出口（突扩）	管出口处进入大容器	1.0
90° 标准弯头	中等曲率	$0.3 \sim 0.9$
全开闸阀	阀板提起	$0.15 \sim 0.2$
全开球阀	全开状态	$5 \sim 10$
突然扩大（$A_1 \to A_2$）	小管到大管	$\zeta = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2$（理论）
突然缩小（$A_1 \to A_2$）	大管到小管	$\zeta \approx 0.5\left(1 - \frac{A_2}{A_1}\right)$（经验）

7-04-4 沿程损失与局部损失对比

对比项	沿程损失	局部损失
发生位置	直管段全长	管件、截面变化处
空间分布	均匀、连续	集中、短距离
主要机理	黏性摩擦	分离、旋涡、二次流
计算公式	$h_f = \lambda \frac{L}{d} \frac{v^2}{2g}$	$h_j = \zeta \frac{v^2}{2g}$
系数确定	$\lambda(Re, \varepsilon/d)$	ζ（实验，取决于构件类型）
在长管路中	占主导	占次要比例
在短管路中	可忽略	占主要比例

> **重要说明**: “Major” 和 “Minor” 是历史命名习惯，不表示数值上的绝对主次。在短管系统中（如液压元件内部流道），局部损失可能远大于沿程损失，此时"次要"二字仅指称谓而非量级判断。

7-05 减小次要损失的措施

7-05-1 减小局部损失的基本思想

局部损失的本质是**流道突变引发的边界层分离和旋涡生成**。减小的总原则是：**使流动尽可能平顺，延缓或消除边界层分离**，从而减少旋涡区的产生和尺寸。

7-05-2 具体措施

① 管道入口处 — 加圆角或倒角

- 锐口入口 $\zeta \approx 0.5$，倒圆角后降至 $0.05 \sim 0.10$；
- 圆滑入口使流体从大容器逐步加速进入管道，避免在入口处突然收缩形成的分离区。

② 突然扩大 → 改用渐扩管（Diffuser）

- 突然扩大：$\zeta = (1 - A_1/A_2)^2$；
- 渐扩管：扩散角 $\theta < 8° \sim 10°$ 时阻力显著减小；
- 最佳扩散角约 $6° \sim 8°$，过大则分离，过小则管长增加大、摩擦损失增大。

③ 突然缩小 → 改用渐缩管（Nozzle/Reducer）

- 渐缩管流动相对稳定，收缩角不宜过大；
- 圆滑过渡可使 ζ 进一步降低。

④ 弯管 — 加大曲率半径 + 加导流叶片

- 加大曲率半径 R/d（通常取 $R/d \geq 3 \sim 5$）减小离心力效应；
- 安装**导流叶片（guide vanes）**：
  - 将大弯管分隔为多个小弯道；
  - 减小弯道内外侧压差，抑制二次流；
  - 可减小局部阻力 $40\% \sim 70\%$；
- 尽量用弯管代替直角直角接头（死弯）。

⑤ 管道分支、汇合 — 采用顺流三通

- 用顺流三通 Y 型三通替代直角 T 型三通；
- 减小支管与主管夹角，使汇流/分流方向更平顺。

⑥ 阀门 — 选用低阻阀门，尽量保持全开

- 闸阀 $\ll$ 球阀/截止阀的局部阻力；

- 蝶阀在完全开启时阻力极小；
- 工程中应避免用阀门作为长时间精细节流的手段（除非必要），改用设计节流孔板等更可控的构件。

⑦ 其他措施 #

- 管道内表面保持光滑，减小附加摩擦；
- 避免在紧邻弯头/阀门的上下游安装其他管件，保证足够直管段（约 $5 \sim 10d$）使流动恢复；
- 使用渐变的截面过渡，避免任何形式的台阶或尖角。

7-05-3 措施效果对比（定性）

措施	典型 ζ 改善	工程代价
锐口 $\rightarrow$ 圆角入口	$0.50 \rightarrow 0.10$	极低
突扩 $\rightarrow$ 渐扩($\theta = 8°$)	$0.25 \rightarrow 0.05$（以速度头计）	中等（需空间）
直角弯 $\rightarrow$ 大曲率弯	$1.5 \rightarrow 0.3 \sim 0.5$	中等
弯管加导流叶片	再降 $40\% \sim 70\%$	中等偏高
T 三通 $\rightarrow$ Y 三通	降低约 50%	中等

易混点、常考点与典型题解题模板

易混点辨析

易混概念	区别关键
沿程损失 vs 局部损失	前者发生在直管全段，系数 λ；后者发生在管件处，系数 ζ
达西摩阻系数 λ vs 范宁摩阻系数 C_f	$\lambda = 4C_f$；不同教材表述不同，注意区分
层流 $v = u_{\max}/2$ vs 湍流 $v \approx 0.82u_{\max}$	层流精确可算，湍流经验近似
Re 公式中的 d 与水力直径 d_e	圆管用 d，非圆管用 $d_e = 4A/\chi$
理想流体 vs 实际流体速度分布	理想均匀；实际层流抛物线、湍流扁平
h_f 与 Δp_f	h_f为水头(m)，$\Delta p_f = \rho g h_f$ 为压降(Pa)

常考点

1. **雷诺数的计算与流态判断**：给 v, d, ρ, μ 或 ν，求 Re，判流态。
2. **层流圆管速度分布**：计算给定 r 处的速度，或由流量反求压降。
3. **平均/最大速度关系**：层流 $\frac{v}{u_{\max}} = \frac{1}{2}$；湍流 ≈ 0.8。

4. **达西-魏斯巴赫公式应用**：已知 Q, d, L, λ 求 h_f 或 Δp。
5. **局部损失计算**：查表或给定 ζ，求 h_j。
6. **串联/并联管路**：总损失相加/各支路损失相等。
7. **Moody 图/ Colebrook 公式查读**：已知 Re 和 ε/d 确定 λ。
8. **减小局部损失的措施**：简答题或问答题。

典型题解题模板

题型一：层流圆管压降/流量计算

模板：

```
已知：d, L, μ, v 或 Q
1. 求 Re = ρvd/μ，验证 Re < 2300
2. 确认层流，λ = 64/Re
3. 达西公式：Δp = λ(L/d)(ρv²/2)
   或直接用哈根-泊肃叶公式：Q = πd⁴Δp/(128μL)
```

题型二：湍流管道沿程损失计算

模板：

```
已知：d, L, Q, ε, ρ, μ
1. v = Q/A = 4Q/(πd²)
2. Re = ρvd/μ
3. ε/d = 相对粗糙度
4. 查 Moody 图 或 用 Colebrook 公式求 λ
5. hf = λ(L/d)(v²/2g)
```

题型三：简单管路总能量损失

模板：

```
已知：管道各段长度、管径、管件类型
1. 逐段计算沿程损失 hf = Σλ(L/d)(v²/2g)
2. 逐个管件计算局部损失 hj = Σζ(v²/2g)
3. 总损失 hw = hf + hj
4. 伯努利方程：z₁ + p₁/(ρg) + v₁²/(2g) = z₂ + p₂/(ρg) + v₂²/(2g) + hw
```

题型四：并联管路流量分配 #

模板：

```
两支路 A、B 并联：
1. 共同压降：ΔpA = ΔpB
2. 流量守恒：Q总 = QA + QB
3. 对每支路：Δp = λ(L/d)(ρv²/2)
4. 联立求解
```

本章覆盖清单

ID	原始重点	覆盖位置	状态
7-01	层流/湍流与 Re 判别（Re<2300，Re>4000）	§7-01	已写
7-02	圆管速度分布；平均/最大流速关系（理想/层流/湍流三种情况）	§7-02	已写
7-03	层流与湍流阻力产生的机理	§7-03	已写
7-04	管内流动阻力分类；主要损失/次要损失及机理	§7-04	已写
7-05	减小次要损失的措施	§7-05	已写

补充覆盖要点：

- 雷诺数与雷诺实验：§7-01-1，§7-01-2
- 过渡流区间说明：§7-01-3（附教材口径说明）
- 非圆管水力直径：§7-01-4
- 理想流体的均匀速度分布：§7-02-1
- 哈根-泊肃叶定律（解析解）：§7-02-2
- 湍流1/7次方律与对数律：§7-02-3，§7-02-4
- 达西-魏斯巴赫公式详解：§7-04-2
- Moody 图与 Colebrook 公式：§7-03-3，§7-04-2
- 局部损失机理（边界层分离 + 旋涡耗散 + 二次流）：§7-04-3
- 典型局部阻力系数表：§7-04-3
- 易混点/常考点/解题模板：单独章节

主要参考资料

1. 工程流体力学教材（第7章 管内流动）
2. Fox, McDonald, Pritchard. *Introduction to Fluid Mechanics*
3. White, F. M. *Fluid Mechanics*, 8th Ed.
4. Cengel & Cimbala. *Fluid Mechanics: Fundamentals and Applications*
5. 百度百科/维基百科：雷诺数、泊肃叶定律、达西-魏斯巴赫方程式、穆迪图
6. 知乎专栏 / 公开课件：管内流动、沿程损失与局部损失
7. Colebrook, C. F. (1939). “Turbulent flow in pipes, with particular reference to the transition region between the smooth and rough pipe laws”

第8章 平面势流（Plane Potential Flow）

一页式：本章名词与公式解释

核心名词

术语	英文	解释
平面流动（二维流动）	Plane flow / 2D flow	流动参数仅依赖两个空间坐标（如 x, y），第三个方向速度为零或可忽略，$\frac{\partial}{\partial z} = 0$，$w = 0$。
无旋流动（有势流动）	Irrotational flow / Potential flow	流场中各点流体微团的旋转角速度为零，即 $\nabla \times \boldsymbol{V} = \mathbf{0}$。
有旋流动	Rotational flow	流场中至少存在一点旋度不为零。
速度势（速度势函数）	Velocity potential	标量函数 $\phi(x, y, z, t)$，满足 $\boldsymbol{V} = \nabla\phi$（无旋流动的必要充分条件）。方向导数 $\frac{\partial \phi}{\partial s}$ 等于速度在 s 方向的分量。
流函数	Stream function	对于不可压缩平面流动，存在标量函数 $\psi(x, y, t)$，满足 $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$，$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$，自动满足连续性方程。
等势线	Equipotential line	$\phi =$ 常数 的曲线。
流线	Streamline	$\psi =$ 常数 的曲线，线上每点切线方向与速度方向一致。
拉普拉斯方程	Laplace’s equation	$\nabla^2\phi = 0$ 或 $\nabla^2\psi = 0$。满足该方程的函数称为**调和函数**。
柯西-黎曼条件	Cauchy-Riemann conditions	对于不可压缩平面无旋流动，ϕ 与 ψ 满足 $u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$。
共轭调和函数	Conjugate harmonic functions	ϕ 与 ψ 都满足拉普拉斯方程，且满足柯西-黎曼条件。
复势	Complex potential	$w(z) = \phi + i\psi$，其中 $z = x + iy$。
旋度 / 涡量	Curl / Vorticity	$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{V}$，描述流体微元旋转程度。
环量	Circulation	$\Gamma = \oint_C \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$，沿封闭曲线的速度线积分。
点源 / 点汇	Source / Sink	流体从一点均匀向外（或向内）流动。Q 为体积流量（源强度）。
点涡	Vortex	流体绕一点做圆周运动，速度与半径成反比。Γ 为环量强度。
偶极子	Doublet / Dipole	点源与等强度点汇无限靠近形成的极限流动。
开尔文定理	Kelvin’s theorem	理想流体中，沿封闭流体线的速度环量不随时间变化。
流网	Flow net	等势线与流线正交构成的网络。
马格努斯效应	Magnus effect	旋转圆柱在来流中受到升力的现象。
达朗贝尔佯谬	d’Alembert’s paradox	理想流体无旋绕流物体时阻力为零的结论。

核心公式一览

公式	名称 / 说明	适用条件
$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{V} = \mathbf{0}$	无旋判别式	任意流体
$\boldsymbol{V} = \nabla\phi$	速度势定义	$\nabla \times \boldsymbol{V} = \mathbf{0}$（无旋）
$u = \dfrac{\partial\phi}{\partial x},\ v = \dfrac{\partial\phi}{\partial y},\ w = \dfrac{\partial\phi}{\partial z}$	速度-势函数关系	无旋流动
$\nabla^2\phi = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$	不可压缩无旋：速度势满足拉普拉斯方程	不可压缩 + 无旋
$u = \dfrac{\partial\psi}{\partial y},\ v = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$	流函数定义	不可压缩平面流动
$\nabla^2\psi = 0$	平面无旋：流函数满足拉普拉斯方程	不可压缩平面无旋
$\dfrac{\partial\phi}{\partial x} = \dfrac{\partial\psi}{\partial y},\ \dfrac{\partial\phi}{\partial y} = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$	柯西-黎曼条件	不可压缩平面无旋
$Q = \oint \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}A$	体积流量（二维中 $Q = \Delta\psi$）	不可压缩平面流动
$\Gamma = \oint_C \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$	速度环量定义	任意流动
$\Gamma = \int_A \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}A$	斯托克斯定理	环量 = 通过张曲面的涡通量
$\boldsymbol{a} = \dfrac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t} = \nabla\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial t} + \dfrac{1}{2}V^2\right)$	无旋流动加速度有势	$\nabla\times\boldsymbol{V} = 0$ 且 $\nabla\times\boldsymbol{a} = 0$
$\dfrac{p}{\rho} + \dfrac{1}{2}V^2 + \dfrac{\partial\phi}{\partial t} + gz = C(t)$	非定常伯努利方程（柯西-拉格朗日积分）	理想不可压缩无旋流动
$w(z) = \phi + i\psi$	复势	平面势流
$\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = u - iv$	复速度	平面势流
$\phi = Ux,\ \psi = Uy$	均匀流（沿 x 方向）	基本解
$\phi = \dfrac{Q}{2\pi}\ln r,\ \psi = \dfrac{Q}{2\pi}\theta$	点源 ($Q > 0$) / 点汇 ($Q < 0$)	基本解
$\phi = \dfrac{\Gamma}{2\pi}\theta,\ \psi = -\dfrac{\Gamma}{2\pi}\ln r$	点涡（$\Gamma > 0$ 逆时针）	基本解
$\phi = \dfrac{M}{2\pi}\dfrac{\cos\theta}{r},\ \psi = -\dfrac{M}{2\pi}\dfrac{\sin\theta}{r}$	偶极子（M 为偶极矩，方向沿 x 正轴）	基本解

学习目标与主线

本章的核心主线是：**对于理想不可压缩流体的无旋流动，如何通过势函数和流函数两个标量函数，将复杂的流体运动简化为求解拉普拉斯方程的问题。**

学习路径：

1. 理解流函数的存在条件 → 不可压缩平面流动（连续性方程自动满足）
2. 理解势函数的存在条件 → 无旋流动
3. 两者同时存在 → 不可压缩平面无旋流动（平面势流）
4. 此时 ϕ 和 ψ 都满足拉普拉斯方程 → 互为共轭调和函数
5. 利用基本解（均匀流、点源/汇、点涡、偶极子）的叠加，构造复杂绕流问题的解
6. 无旋流动的特点：速度有势、加速度有势

核心知识点详解

8.1 流函数及其存在条件

8.1.1 流函数的定义

对于二维不可压缩流动 ($\nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0$)，连续性方程为：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

这个方程自动暗示存在一个标量函数 $\psi(x, y, t)$，使得：

$$\boxed{u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}}$$

称 ψ 为**流函数**（stream function）。

验证： 将定义式代入连续性方程：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$$

故自动满足。

8.1.2 流函数的存在条件

条件	原因
二维（平面）流动	三维不可压缩流动中也存在满足类似性质的流函数，但形式更复杂（如三维 Stokes 流函数）；标准教材中的"流函数"特指二维情形
不可压缩流体	$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0$ 是流函数定义的基础

> **要点：** 只要流动是二维不可压缩的，无论有旋还是无旋，流函数都存在。流函数的存在**不需要**无旋条件。

8.1.3 流函数的物理意义

1. $\psi =$ 常数 **即流线**。
   - 沿流线：$d\psi = \dfrac{\partial \psi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial \psi}{\partial y}dy = -v\,dx + u\,dy = 0$
   - 即 $\dfrac{dx}{u} = \dfrac{dy}{v}$，正是流线微分方程。
2. **两条流线的流函数差值等于通过这两条流线之间的体积流量（单位宽度）**。

$$\psi_2 - \psi_1 = \int_1^2 \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = Q_{12}$$

   即通过任意连接两条流线的曲线的体积流量（单位宽度）。
3. **流线不能相交（驻点和奇点除外）**。

8.1.4 极坐标系中的流函数

在极坐标 (r, θ) 中，径向速度 v_r 和切向速度 v_θ 与流函数的关系为：

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \qquad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

8.2 速度势函数及其存在条件

8.2.1 速度势的定义

对于**无旋流动** ($\nabla \times \boldsymbol{V} = \boldsymbol{0}$)，存在标量函数 $\phi(x, y, z, t)$，使得：

$$\boxed{\boldsymbol{V} = \nabla \phi}$$

即：

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

称 ϕ 为**速度势函数**（velocity potential），简称为**速度势**或**势函数**。

8.2.2 速度势的存在条件

条件	原因
无旋流动	$\nabla \times \boldsymbol{V} = \boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{V} = \nabla\phi$ 是矢量分析的斯托克斯定理推论
单连通区域	在数学上要求考虑积分路径的单值性；实际工程中通常默认单连通

> **充分必要条件：** $\nabla \times \boldsymbol{V} = \boldsymbol{0}$ **等价于** 存在速度势 ϕ 使得 $\boldsymbol{V} = \nabla\phi$。
>
> - 若 $\boldsymbol{V} = \nabla\phi$，则 $\nabla \times \boldsymbol{V} = \nabla \times (\nabla\phi) \equiv \boldsymbol{0}$（旋度的梯度恒为零）。
> - 反之，若 $\nabla \times \boldsymbol{V} = \boldsymbol{0}$，则 $\phi = \displaystyle\int_{r_0}^{r} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$（与路径无关），取其梯度即得 $\boldsymbol{V}$。

8.2.3 速度势的物理意义

1. **速度势的方向导数等于该方向的速度分量：**

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = V_s$$

特别地，沿流线方向 $\dfrac{\partial \phi}{\partial s} = V$。

2. **等势面**（$\phi =$ 常数）**与流线正交**。
3. **速度势可差一任意常数**（不影响速度场）。

8.2.4 极坐标系中的速度势

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}, \qquad v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

8.3 如何判断无旋流动

根据旋度（涡量）定义判断： $$ \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{V} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \ u & v & w \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}

- \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}
- \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} $$

无旋条件：

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

对于**平面流动** ($w = 0$, $\partial/\partial z = 0$)，无旋条件简化为:

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}}$$

> **判断步骤:**
>
> 1. 写出速度分量 u, v, w（已知速度场）;
> 2. 计算偏导并验证交叉偏导相等;
> 3. 若三个条件都满足 → 无旋;
> 4. 对于平面流动，只需验证 $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y}$。

例题口径： 已知速度场 $u = 2xy$, $v = -y^2$，判断是否有旋。

> 解: $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2x \therefore \dfrac{\partial v}{\partial x} \neq \dfrac{\partial u}{\partial y}$，流动有旋。

8.4 无旋流动的特点：速度有势、加速度有势

8.4.1 速度有势

如 §8.2.1 所定义:

$$\boxed{\boldsymbol{V} = \nabla \phi}$$

这是无旋流动最核心的特点，将三个速度分量的求解简化为一个标量函数 ϕ 的求解。

8.4.2 加速度有势（加速度无旋）

对于**无旋流动**，加速度也是无旋的，即加速度也有势:

$$\nabla \times \boldsymbol{a} = \mathbf{0}$$

证明： 对于无旋流动 $\boldsymbol{V} = \nabla\phi$，

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + (\boldsymbol{V} \cdot \nabla)\boldsymbol{V}$$

利用矢量恒等式 $(\boldsymbol{V} \cdot \nabla)\boldsymbol{V} = \frac{1}{2}\nabla(V^2) - \boldsymbol{V} \times (\nabla \times \boldsymbol{V})$，

由于 $\nabla \times \boldsymbol{V} = \mathbf{0}$，得到:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\partial(\nabla\phi)}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla(V^2) = \nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}V^2\right)$$

因此 $\boldsymbol{a}$ 可表示为某个标量函数的梯度:

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}V^2\right)}$$

结论： 无旋流动中，加速度也是有势的，即 $\nabla \times \boldsymbol{a} = \mathbf{0}$。

> **意义：** 加速度有势直接导出了非定常伯努利方程（柯西-拉格朗日积分）的成立:
>
> $$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + \frac{\partial\phi}{\partial t} + gz = C(t)$$
>
> 其中 $C(t)$ 在全流场为同一时间函数（不同于定常伯努利方程沿流线常数）。

8.4.3 适用前提

无旋流动的适用前提（即**开尔文定理**的条件）:

1. **理想流体**（无粘，$\mu = 0$）—— 粘性会产生并扩散涡量；
2. **质量力有势**（如重力场有势：$\boldsymbol{g} = -\nabla(gz)$）；
3. **正压流体**（密度仅为压强的函数，$\rho = \rho(p)$）。

在上述条件下，若流动初始无旋，则始终保持无旋。这为势流理论的应用提供了动力学基础。

口径差异说明：

- 国内部分教材（如吴望一《流体力学》§6）将无旋流动称为**有势流动**，强调速度有势这一等价关系。
- 国外教材（如 White §6, Fox §6）通常直接称 **potential flow**，默认同时满足不可压缩 + 无旋。
- "加速度有势"的推导主要见于较深入的教材（如吴望一、Batchelor），一般入门教材只强调速度有势。

8.5 不可压缩平面无旋流动：ϕ 与 ψ 的关系

8.5.1 同时满足拉普拉斯方程

当流动**同时满足**不可压缩 ($\nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0$) 和无旋 ($\nabla \times \boldsymbol{V} = \mathbf{0}$) 时：

- 将 $\boldsymbol{V} = \nabla\phi$ 代入 $\nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0 \rightarrow$

  $$\nabla \cdot (\nabla\phi) = \nabla^2\phi = 0$$

  即速度势满足**拉普拉斯方程**。
- 对于平面无旋流动，流函数 ψ 也满足拉普拉斯方程（将 u, v 的 ψ 表达式代入无旋条件 $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$）：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) \implies -\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \implies \nabla^2\psi = 0$$

因此，在**不可压缩平面无旋流动**中，ϕ 和 ψ 都是**调和函数**（满足拉普拉斯方程）。

8.5.2 柯西-黎曼条件与共轭调和函数

由 $u = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}$ 和 $v = \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$，即**柯西-黎曼条件**：

$$\boxed{\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}}$$

ϕ 和 ψ 称为**共轭调和函数**（conjugate harmonic functions）。给定其中一个，可通过柯西-黎曼条件（积分）求出另一个（差一常数）。

8.5.3 等势线与流线正交

由柯西-黎曼条件可得：

$$\nabla\phi\cdot\nabla\psi=\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}=u(-v)+vu=0$$

因此 $\nabla\phi\perp\nabla\psi$，即**等势线与流线处处正交**。这是**流网（flow net）**的几何基础。

8.5.4 流函数与势函数的存在条件对比总结

函数	存在条件	拉普拉斯方程满足条件
流函数 ψ	不可压缩 + 平面（二维）流动	还需无旋（$\nabla\times\boldsymbol{V}=\mathbf{0}$）
速度势 ϕ	无旋流动	还需不可压缩（$\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0$）
两者同时存在	不可压缩 + 平面 + 无旋（即平面势流）	自动满足

> **特别提示：**
>
> - 不可压缩平面**有旋**流动中：**存在流函数** ψ**，但不存在速度势** ϕ。
> - 不可压缩**三维**无旋流动中：**存在速度势** ϕ**，但不存在通常定义的流函数** ψ。
> - 只有在**不可压缩平面无旋流动（平面势流）**中，两者同时存在。

8.6 平面势流的基本解

8.6.1 均匀流（Uniform flow）

沿 x 方向速度为 U 的均匀流动：

$$\phi=Ux,\qquad\psi=Uy,\qquad w(z)=Uz$$

8.6.2 点源与点汇（Source & Sink）

在原点处强度为 Q 的点源 $(Q>0)$ 或点汇 $(Q<0)$：

$$\phi=\frac{Q}{2\pi}\ln r,\qquad\psi=\frac{Q}{2\pi}\theta,\qquad w(z)=\frac{Q}{2\pi}\ln z$$

- 径向速度 $v_r=\dfrac{Q}{2\pi r}$，切向速度 $v_\theta=0$
- 流线沿径向向外（源）或向内（汇）

- Q 的单位为 m^2/s（单位宽度的体积流量）

8.6.3 点涡（Vortex）

在原点处环量为 Γ 的点涡：

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta, \qquad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r, \qquad w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z$$

- 切向速度 $v_\theta = \dfrac{\Gamma}{2\pi r}$，径向速度 $v_r = 0$
- $\Gamma > 0$ 逆时针旋转
- 流线是同心圆，等势线是径向射线

8.6.4 偶极子（Doublet/Dipole）

由强度为 Q 的点源和 $-Q$ 的点汇在 x 轴上相距 δ 时，令 $\delta \to 0$ 且 $Q\delta \to M$（偶极矩）的极限：

$$\phi = \frac{M}{2\pi}\frac{\cos\theta}{r}, \qquad \psi = -\frac{M}{2\pi}\frac{\sin\theta}{r}, \qquad w(z) = \frac{M}{2\pi}\frac{1}{z}$$

方向沿 x 正轴时 $M > 0$。

8.7 势流叠加原理与典型绕流

拉普拉斯方程为线性方程，因此势流满足叠加原理：若 ϕ_1, ϕ_2 均满足拉普拉斯方程，则 $\phi_1 + \phi_2$ 也满足。

典型叠加示例：

叠加类型	结果	应用
均匀流 + 点源	半无穷柱体绕流	模拟钝头体前缘
均匀流 + 偶极子	无环量圆柱绕流	圆柱绕流基本解
均匀流 + 偶极子 + 点涡	有环量圆柱绕流 → 升力	马格努斯效应
均匀流 + 点源 + 点汇	兰金卵形体（Rankine oval）	有限长物体绕流

典型题型与解题模板

模板 1：判断是否有旋 + 求流函数/势函数

已知速度场求（1）判断是否有旋（2）若有势求 ϕ（3）若不可压缩求 ψ。

```
Step 1: 计算旋度分量
  - 平面流动：计算 ∂v/∂x 和 ∂u/∂y
  - 若 ∂v/∂x = ∂u/∂y → 无旋，存在 φ
  - 若 ∂u/∂x + ∂v/∂y = 0 → 不可压缩，存在 ψ

Step 2: 求速度势 φ
  - 由 u = ∂φ/∂x 积分得 φ = ∫u dx + f(y)
  - 由 v = ∂φ/∂y 确定 f(y)

Step 3: 求流函数 ψ
  - 由 u = ∂ψ/∂y 积分得 ψ = ∫u dy + g(x)
  - 由 v = -∂ψ/∂x 确定 g(x)
```

模板 2：势流叠加求解绕流问题

```
Step 1: 识别所需基本解
  - 来流均匀流：φ₁ = Ux
  - 物体形状由特定奇点组合实现（如圆柱=均匀流+偶极子）

Step 2: 叠加构造复势 w(z) = φ + iψ

Step 3: 验证物面边界条件（物面为流线，ψ = const）

Step 4: 求速度场 V = |dw/dz|
  - 复速度 dw/dz = u - iv

Step 5: 用伯努利方程求压强分布
  - 定常：p/ρ + V²/2 = const
  - 非定常需加上 ∂φ/∂t 项

Step 6: 积分求力和力矩
```

模板 3：已知势函数或流函数求速度和压强

已知 φ(x,y) 或 ψ(x,y)，求速度分布和物面压强系数。

```
Step 1: 求速度分量
  - 已知 φ: u = ∂φ/∂x, v = ∂φ/∂y
  - 已知 ψ: u = ∂ψ/∂y, v = -∂ψ/∂x

Step 2: 求速度大小 V = √(u² + v²)

Step 3: 求压强（伯努利方程）
  - 定常不可压缩: p∞ + ½ρU² = p + ½ρV²
  - 压强系数: Cp = (p - p∞) / (½ρU²) = 1 - (V/U)²
```

易混点与考试提醒

易混点对比

易混概念 A	易混概念 B	区分要点
流函数存在条件	势函数存在条件	流函数 → 不可压缩 + 二维；势函数 → 无旋。两者完全不同！
流函数满足拉普拉斯方程的条件	流函数存在条件	存在只需不可压缩二维；满足 $\nabla^2\psi = 0$ 还需无旋。
势函数满足拉普拉斯方程的条件	势函数存在条件	存在只需无旋；满足 $\nabla^2\phi = 0$ 还需不可压缩。
无旋流动	有势流动	无旋 $\Longleftrightarrow$ 有势（存在 ϕ），两者完全等价
流线	迹线	流线 = $\psi = \text{const}$（欧拉瞬时概念）；迹线 = 质点轨迹（拉格朗日）
平面有旋流动的流函数	平面无旋流动的流函数	前者只有 ψ，后者 ϕ 和 ψ 同时存在且互为共轭调和
点涡	兰肯涡	点涡中心 $v_\theta \to \infty$（奇点）；兰肯涡中心刚性旋转，外围势涡
环量 Γ	涡量 ω	环量是标量（积分量）；涡量是矢量（局部量），斯托克斯定理联系两者

常考点

1. **判断是否有旋并求势函数/流函数**：给出速度场 $u(x, y), v(x, y)$，按模板1求解，是最常见的计算题类型。
2. **流函数与势函数的物理意义问答题**：如"流函数的等值线是什么？为什么？"、“势函数存在条件是什么？”

3. **等势线与流线正交关系的证明**：利用 $\nabla\phi \cdot \nabla\psi = 0$。
4. **柯西-黎曼条件**：给定 ϕ 求 ψ 的积分计算。
5. **无旋流动的特点**：简答题，“为什么说无旋流动加速度也有势？”
6. **开尔文定理的适用条件**：理想、质量力有势、正压；初始无旋→始终无旋。
7. **基本势流（均匀流、点源/汇、点涡、偶极子）的 ϕ 和 ψ 表达式记忆。**
8. **势流叠加构造简单绕流**：圆柱绕流的 ϕ 和 ψ 表达式、速度分布、压强系数。
9. **流函数的流量意义**：两条流线之间的流量 = $\psi_2 - \psi_1$（单位深度）。

考试提醒

> ⚠️ **常见失分点：**
>
> 1. **混淆流函数与势函数的存在条件**：考试中最容易出错之处。记住：ψ（不可压缩二维）$\neq$ 无旋；ϕ（无旋）$\neq$ 不可压缩。
> 2. **流函数定义符号**：$u = \partial\psi/\partial y$，$v = -\partial\psi/\partial x$。注意 v 前面有负号。不同教材符号约定可能相反，需以考题为准。
> 3. **极坐标下 ϕ 和 ψ 的梯度表达式**：$v_r = \partial\phi/\partial r$，$v_\theta = (1/r)\partial\phi/\partial\theta$；$v_r = (1/r)\partial\psi/\partial\theta$，$v_\theta = -\partial\psi/\partial r$。容易将 ϕ 和 ψ 的极坐标表达式弄混。
> 4. **压强计算中的 $\partial\phi/\partial t$ 项**：非定常情况下不要忘记加 $\partial\phi/\partial t$。
> 5. **叠加原理的物面条件**：叠加后必须验证物面为流线（$\psi =$ 常数），否则解无效。

本章覆盖清单

覆盖 ID	原始重点	位置
8-01	流函数和势函数存在条件	§8.1 流函数及其存在条件（§8.1.2 存在条件表格）；§8.2 速度势函数及其存在条件（§8.2.2 存在条件表格）；§8.5.4 存在条件对比总结
8-02	无旋判别与特点；速度有势、加速度有势	§8.3 如何判断无旋流动（含计算步骤和例题）；§8.4 无旋流动的特点（§8.4.1 速度有势、§8.4.2 加速度有势的推导证明、§8.4.3 适用前提/开尔文定理条件）

辅助覆盖

辅助知识点	位置
ϕ 和 ψ 的拉普拉斯方程推导	§ 8.5.1
柯西-黎曼条件与共轭调和函数	§ 8.5.2
等势线与流线正交（流网）	§ 8.5.3
基本势流解（均匀流、点源/汇、点涡、偶极子）	§ 8.6
势流叠加原理与典型绕流	§ 8.7
三种解题模板	§ 典型题型与解题模板
易混点表 + 常考点 + 失分点	§ 易混点与考试提醒

主要参考资料与依据

1. **White, F. M.**, *Fluid Mechanics*, 8th ed., McGraw-Hill, 2016. — Chapter 6: Incompressible Inviscid Flow. 势流理论的标准英文教材参考：速度势、流函数、基本解、圆柱绕流。
2. **Fox, R. W., McDonald, A. T., Pritchard, P. J.**, *Introduction to Fluid Mechanics*, 8th ed., Wiley, 2011. — Chapter 6: Incompressible Inviscid Flow. 势流量纲分析、无旋流动特点。
3. **Cengel, Y. A., Cimbala, J. M.**, *Fluid Mechanics: Fundamentals and Applications*, 4th ed., McGraw-Hill, 2018. — Chapter 10: Potential Flow. 势流基本解与叠加的系统介绍。
4. **吴望一**, *流体力学*（上册）, 北京大学出版社. — § 5 理想不可压缩流体无旋流动、 § 6 流函数与速度势。国内经典教材，对"加速度有势"的推导最为详细。主要参考来源。
5. **闻建龙**, *工程流体力学*, 机械工业出版社. — 第8章 理想流体多维流动基础。流函数和势函数的条件表格、无旋判别例题参考。
6. **Batchelor, G. K.**, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1967. — Chapter 6: Irrotational Flow Theory. 加速度有势的经典推导。
7. **原文重点梳理**：提供的《流体力学课程核心重点梳理》第8章条目（“流函数和势函数存在的条件”、“如何判别流体是否作无旋流动？无旋流动有哪些特点？如果一流场的旋度为零，则流动无旋。无旋流动速度有势，加速度有势。”）。
8. **网上公开资料参考**：OSU Intermediate Fluid Mechanics (open.oregonstate.education) Chapters 4–5; 知乎/CSDN 关于流函数、势函数的物理意义讨论和习题解析。
9. **MIT OCW**：“Potential Flow Theory” (2.016 Hydrodynamics) 讲义。

口径差异说明：

- 国内教材中常区分"势函数"和"流函数"的存在条件，国外教材则统一在"Potential Flow"标题下同时讨论 ϕ 和 ψ。本报告保留了国内教材的习惯表述（分别判断条件），同时在 §8.5.4 给出对比总结。
- "加速度有势"的推导在国内教材（吴望一）中较为强调，但国外多数入门教材只提及速度有势。本报告两者均覆盖。
- 流函数定义式的符号约定：流函数符号约定存在差异：常见定义有 $u = \partial\psi/\partial y,\ v = -\partial\psi/\partial x$，也有教材整体取相反号 $u = -\partial\psi/\partial y,\ v = \partial\psi/\partial x$。本报告采用国内工科教材常用的前一种约定，核心不变：$\psi =$ 常数 为流线，相邻流线的 $\Delta\psi$ 表示单位宽度体积流量。

本章初稿完成日期：2026-07-03

第9章 绕流流动

一页式：本章名词与公式解释

名词	符号/公式	简要说明
绕流（Flow around a body / Bluff body flow）	—	流体绕过静止或运动物体的流动现象
边界层/附面层（Boundary layer）	—	紧贴物面、速度梯度很大的薄层流体区域，1904年普朗特（L. Prandtl）提出
边界层厚度（Boundary layer thickness）	δ	从壁面到速度达到 $0.99\,U_\infty$ 处的法向距离
位移厚度（Displacement thickness）	$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy$	因黏性阻滞，边界层内损失的流量相当于理想流动中物面向外推移的距离
动量厚度（Momentum thickness）	$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy$	边界层内损失的动量相当于按主流速度计算的动量厚度
形状因子（Shape factor）	$H = \delta^*/\theta$	反映速度剖面形状的无量纲参数；层流 $H \approx 2.6$，湍流 $H \approx 1.3 \sim 1.4$
顺压梯度（Favorable pressure gradient）	$\frac{dp}{dx} < 0$	沿流向压强下降，加速流动，稳定边界层
逆压梯度（Adverse pressure gradient）	$\frac{dp}{dx} > 0$	沿流向压强上升，减速流动，可能导致分离
边界层分离（Flow separation）	—	边界层脱离物面，在分离点下游形成回流区的现象
分离点（Separation point）	$\displaystyle \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right	_{y=0} = 0$
尾流（Wake）	—	物体下游流场中流速降低、动量亏损的区域
压差阻力（Pressure drag / Form drag）	—	因物体前后压强差产生的阻力分量
摩擦阻力（Friction drag / Skin friction drag）	—	因壁面切应力产生的阻力分量
卡门涡街（Kármán vortex street）	—	钝体绕流中，两侧交替脱落的旋涡在尾流中排列成两列规则的交错涡列
斯特劳哈尔数（Strouhal number）	$St = \frac{fD}{U_\infty}$	表征旋涡脱落频率的无量纲数；圆柱 $St \approx 0.19–0.21$（亚临界区）
涡脱落频率（Vortex shedding frequency）	$f = \frac{St\,U_\infty}{D}$	单位时间内从钝体一侧脱落的旋涡数量

名词	符号/公式	简要说明
阻力系数（Drag coefficient）	$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 A}$	无量纲阻力大小，与物体形状和 Re 有关
黏性底层（Viscous sublayer）	—	湍流边界层最内层，切应力以黏性为主导的极薄区域
对数律层（Log-law layer）	$u^+ = \frac{1}{\kappa}\ln y^+ + B$	湍流边界层中间层，速度分布遵从对数律
外层/尾迹律（Wake law / Outer layer）	—	湍流边界层外层，受尾流影响速度偏离对数律

核心公式一览：

$$\delta = y\big|_{u=0.99U_\infty}, \quad \delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy, \quad \theta = \int_0^\infty \frac{u}{U_\infty}\left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0} = 0 \quad (\text{分离条件}), \quad St = \frac{fD}{U_\infty}, \quad C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 A}$$

学习目标与主线

本章学习目标：

1. 理解**边界层的定义与形成机理**——从普朗特划时代的"薄层假设"出发，理解黏性效应局限在物面薄层这一核心思想。
2. 掌握**边界层分离的条件与后果**——学会用逆压梯度解释为何边界层会脱离物面，并理解分离对阻力和流场的重大影响。
3. 掌握**三种边界层厚度的定义**—— δ（99%厚度）、 δ^*（位移厚度）、 θ（动量厚度）的物理意义与积分表达式。
4. 理解**卡门涡街的形成机理**——认识旋涡交替脱落的物理过程及斯特劳哈尔数的工程应用。

主线逻辑：

绕流中，黏性虽只在物面附近薄层（边界层）中起主导作用，但这薄层对全局流动有决定性影响。理解边界层的增长、分离和尾迹发展，就能解释摩擦阻力与压差阻力的来源，以及卡门涡街等复杂现象。

核心知识点详解

9-01 边界层定义与形成（对应 ID 9-01）

9-01-1 历史背景

1904年，德国流体力学大师**路德维希·普朗特（Ludwig Prandtl）**在第3届国际数学家大会上发表了划时代的论文《具有很小摩擦的流体运动》（*Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung*），提出了**边界层（附面层）**的概念。这一理论成功地解决了高雷诺数黏性流体力学的困境：完全忽略黏性的无黏模型（势流理论）无法解释阻力的存在，而完整求解N-S方程又过于复杂。

普朗特的洞察：

- 对于高 Re 流动，黏性效应被**集中限制在物面附近的一个极薄区域**——边界层；
- 边界层以外，黏性可忽略，按势流理论处理；
- 边界层内部，速度从壁面零突变至外缘的 U_∞，梯度极大，黏性不可忽略。

> **教材口径说明**：有些中文教材将"边界层"译为"附面层"（如吴望一《流体力学》），英文统一为Boundary layer。二者意思完全相同，本报告统一使用"边界层"。

9-01-2 边界层的定义

黏性流体流经固体壁面时，在壁面附近形成的**流速梯度明显的流动薄层**称为**边界层**。边界层具有以下基本特征：

1. **厚度远小于特征长度**： $\delta \ll L$（这是普朗特简化的基础）；
2. **壁面处满足无滑移条件**： $u = 0$（粘附条件）；
3. **速度梯度极大**： $\partial u/\partial y \gg \partial u/\partial x$；
4. **外缘光滑过渡到主流**： $u \to U_\infty$，速度近似均匀；
5. **沿流向不断发展**：边界层厚度 δ 沿流向增大；
6. **可能有层流/湍流两种状态**：边界层本身可能从层流转变为湍流。

边界层的形成原因：

- 流体黏性引起的**黏性切应力**在壁面处最大（$y = 0$），使靠近壁面的流体质点减速；
- 壁面**无滑移条件**强制壁面处 $u = 0$；
- 通过黏性扩散，减速效应自壁面向外传播，形成速度分布 $u(y)$。

9-01-3 边界层内的流态

边界层内的流动也存在层流与湍流之分，用**局部雷诺数**（也称边界层雷诺数）来判别：

$$Re_x = \frac{U_\infty x}{\nu}$$

其中 x 为从前缘开始的流向距离。

- 前缘附近（Re_x 较小）：**层流边界层**；
- 经过一个**转捩区（transition）后变为湍流边界层**；
- 转捩临界雷诺数 $Re_{cr} \approx 5 \times 10^5$（平板），受来流湍流度、壁面粗糙度等因素影响。

层流边界层特征：

- 速度剖面较"瘦"，形状因子 $H \approx 2.6$；
- 壁面切应力较小；
- 动量交换主要靠分子黏性扩散。

湍流边界层特征：

- 速度剖面较"胖"，形状因子 $H \approx 1.3 \sim 1.4$；
- 壁面切应力远大于层流；
- 动量交换靠湍流脉动（雷诺应力）主导。

> **考试常考**：平板前缘先层流后湍流，转捩点位置的计算 $x_c = \dfrac{Re_{cr}\nu}{U_\infty}$。

9-01-4 边界层方程（简析）

普朗特通过对量级分析，将N-S方程简化为**边界层方程**：

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

边界条件：$y = 0,\ u = v = 0$；$y \to \infty,\ u \to U_\infty(x)$。

关键简化假设（量级分析）：

- $\partial^2/\partial x^2 \ll \partial^2/\partial y^2$——流向二阶导可忽略；
- p 在法向上近似为常数 $\partial p/\partial y \approx 0$——边界层内压强等于外缘势流在对应 x 处的压强。

> 考试不要求推导边界层方程，但应理解其物理意义和假设前提。

9-02 边界层分离条件与后果（对应 ID 9-02）

9-02-1 什么是边界层分离

边界层分离是指原本紧贴物面流动的边界层在一定条件下**脱离物面**，在分离点下游形成**回流区**（reverse flow region）的现象。分离是绕流学中最关键的现象之一，直接决定了压差阻力的大小和尾流的结构。

9-02-2 分离的物理条件

分离的根本条件：**逆压梯度（adverse pressure gradient）与壁面黏性阻滞**的共同作用。

什么叫逆压梯度？

当流体沿曲壁或扩散形流道流动时，根据伯努利方程：

$$p + \frac{1}{2}\rho U^2 = \text{常数} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dx} = -\rho U \frac{dU}{dx}$$

- 若 $\frac{dU}{dx} < 0$（减速），则 $\frac{dp}{dx} > 0$——**逆压梯度**；
- 若 $\frac{dU}{dx} > 0$（加速），则 $\frac{dp}{dx} < 0$——**顺压梯度**。

分离的详细物理过程：

1. 在**顺压梯度区**（如圆柱或球体的前半部分），主流加速，压强下降。此时壁面附近流体虽然受黏性阻滞，但仍有足够的动能向前运动，**不会分离**。
2. 在**逆压梯度区**（如圆柱或球体的后半部分），主流减速，压强上升。壁面附近本就因黏性而动量较低的流体，还要"逆着压强爬坡"，动能迅速耗尽。
3. 当逆压梯度足够大时，壁面处的流速梯度降为零，继而变为负值——近壁流体**反向流动**，**边界层被推离物面**。

分离的数学条件：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0 \quad \text{且} \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=0} > 0$$

> **考试高频考点**：画出分离点附近的速度剖面变化图（从正梯度 → 零梯度 → 负梯度）。
>
> **关键记忆**：顺压梯度 → 永不分；分离必在逆压梯度区。

9-02-3 影响分离的因素

1. **逆压梯度大小**：梯度越大，分离越早。
2. **边界层流态**：
   - 湍流边界层速度分布更"饱满"，近壁流体动量更大，能抵抗更强的逆压梯度，**分离延迟**；
   - 这就是为什么高尔夫球表面的凹坑（促进转捩）反而能减阻：湍流边界层分离更晚，压差阻力大幅下降的收益超过了摩擦阻力上升的代价。
3. **雷诺数**：Re 越大，湍流边界层分离阻力略有提高（对层流边界层则无影响）。
4. **物面粗糙度**：粗糙表面促进转捩为湍流，可能延迟或抑制分离。

9-02-4 边界层分离的后果

① 压差阻力急剧增大

分离后，物体后部形成低压涡旋区，前部为正压区，前后压强差产生巨大的**压差阻力（form drag）**。对于钝体（bluff body），压差阻力占主导（可达总阻力的 85%–95%）；对于流线形体，压差阻力很小，摩擦阻力为主。

② 尾流增宽（Wake thickening）

分离导致尾流显著增宽，动量亏损增大，能量损失增大。

③ 升力丧失与失速（Aircraft stall）

机翼后缘分离→升力系数急剧下降→飞机**失速**。这是飞行安全的关键问题。

④ 旋涡脱落与振动

分离后形成周期性旋涡脱落（卡门涡街），诱发结构振动，严重时导致共振破坏（如塔科马海峡大桥风毁事件）。

⑤ 内流损失增大

在管路的突扩/突缩段、弯头等处，分离会增加局部损失。

9-02-5 抑制/控制分离的措施

措施	原理	实例
流线型设计	消除逆压梯度或将其减到最小	机翼、潜艇、汽车外形
表面粗糙化	促进层流→湍流转捩，延迟分离	高尔夫球凹坑、网球绒毛
涡旋发生器（Vortex generator）	引入流向涡，将高能流体带入边界层	飞机机翼上表面
边界层吹吸（Blowing/Suction）	向边界层注入能量或吸走低能流体	主动流动控制
前缘缝翼/襟翼（Slats/Flaps）	延迟机翼上表面分离，提高最大升力系数	民航客机起降阶段

9-03 边界层厚度的三种定义（对应 ID 9-03）

9-03-1 名义厚度（Nominal thickness） δ

定义：从壁面到流速达到外缘主流速度 U_∞ 的 **99%** 处的法向距离，记作 δ：

$$\delta = y \quad \text{其中} \quad u(y) = 0.99\,U_\infty$$

特点：

- 是最直观、应用最广的定义；
- 理论上边界层外缘渐近趋于 U_∞，取 99% 是工程约定；
- **约定性**强的定义，受测量精度影响较大；
- 对于层流平板边界层，可由布拉修斯解得到：

$$\delta \approx \frac{5.0\,x}{\sqrt{Re_x}} = \frac{5.0\,x}{\sqrt{U_\infty x/\nu}}$$

即 $\delta \propto \sqrt{x}$，沿流向抛物线增长。

9-03-2 位移厚度（Displacement thickness） δ^*

定义：因边界层内流体受黏性阻滞而减速，使通过给定断面的流量减少；减少的流量相当于将主流从物面"推开"一定距离 $ \delta^{*}$ 在理想均匀流中所占的流量。

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy$$

物理意义：不可压缩流中，本可通过的流量因边界层而损失。相当于无黏情况下，物面外移 δ^* 后的均匀流动的流量与有黏时的实际流量相等。

$$\int_0^\infty U_\infty\,dy - \int_0^\infty u\,dy = U_\infty\,\delta^*$$

工程意义：

- 外流感受到的"等效物面"是原始物面外移 δ^* 后的形状；
- 在机翼设计、进气道设计中修正物面边界层影响；
- 在管道流动中，位移厚度使有效流通截面积减小。

典型值：

- 层流平板边界层： $\delta^* \approx 1.7208\,\delta/3$（即 $\delta^*/\delta \approx 0.344$）；
- 湍流平板边界层（1/7次方律）： $\delta^* \approx \delta/8$（$\delta^*/\delta \approx 0.125$）。

9-03-3 动量厚度（Momentum thickness） θ

定义：边界层内损失的动量通量，相当于按主流速度 U_∞ 计算的动量为 $\rho U_\infty^2\theta$ 的流体厚层：

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U_\infty}\left(1-\frac{u}{U_\infty}\right)dy$$

物理意义：

- 度量边界层内的**动量亏损**；
- 在边界层动量积分方程中起核心作用。

边界层动量积分方程（卡门动量积分方程）：

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{C_f}{2}$$

其中 $C_f = \dfrac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}$ 为当地壁面摩擦系数。

典型值：

- 层流平板边界层（Blasius）： $\theta \approx 0.664\sqrt{\dfrac{\nu x}{U_\infty}}$， $\theta/\delta \approx 0.133$；
- 湍流（1/7次方律）： $\theta/\delta \approx 7/72 \approx 0.097$。

9-03-4 三种厚度的关系总结

对平板边界层，三种厚度的比值：

流态	δ^*/δ	θ/δ	$H = \delta^*/\theta$
层流（Blasius）	≈ 0.344	≈ 0.133	≈ 2.59
湍流（1/7次方律）	≈ 0.125	≈ 0.097	≈ 1.29

> **考试常考**：
>
> 1. 给出速度分布求 δ^* 和 θ；
> 2. 解释 δ^* 和 θ 的物理意义；
> 3. 利用动量积分方程求剪切应力。

9-04 卡门涡街形成机理（对应 ID 9-04）

9-04-1 什么是卡门涡街

卡门涡街（Kármán vortex street），又称冯·卡门涡街，是黏性流体绕过**钝体**时，在一定雷诺数范围内，从钝体两侧交替脱落旋涡，在尾流中形成两列交错排列的规则涡列的现象。该现象由美籍匈牙利裔流体力学家西奥多·冯·卡门（Theodore von Kármán）于1911年首次从理论上阐明。

9-04-2 形成机理（分步详解）

步骤①——绕流与边界层形成

流体流经圆柱（或其他钝体）时，前缘驻点处流速为零，压强最大。流体从驻点沿两侧流动，在前半部分边界层逐渐增厚。

步骤②——加速段与顺压梯度

在圆柱前半部（约 $0^\circ \sim 60^\circ$ 角度范围），流线收缩，流速增大，压强下降（顺压梯度），边界层稳定发展。

步骤③——最大速度点后：逆压梯度出现

在圆柱最宽处（约 90°，即 $\theta = 0^\circ$ 表示驻点）附近流速最大。此后流线扩张，流速减小，压强回升——**逆压梯度**出现。

步骤④——边界层分离

逆压梯度使边界层内低能流体减速至零，在圆柱后部某角度处发生**边界层分离**（圆柱的分离点约在 $80^\circ \sim 85^\circ$ 左右，取决于 Re）。

步骤⑤——一侧形成旋涡并在分离后卷起

分离后的自由剪切层（free shear layer）不稳定，在尾流中卷起形成集中旋涡。关键特征：左右两侧的涡是**交替**脱落的，不是同时。

步骤⑥——交替过程（自激机制）

设圆柱上方（一侧）先形成一个旋涡，该旋涡旋转方向为逆时针（从势流理论可得）。旋涡使圆柱另一侧的流速增大（诱导效应），压强降低，增强另一侧边界层的逆压梯度，促使另一侧率先分离、卷起旋涡，然后诱导回这一侧……如此循环，形成**交替脱落的自我维持机制**。

9-04-3 雷诺数对涡街的影响

Re_D 范围	流动图案特征
$Re < 5$	无分离，流线完全贴体，附着流
$5 \lesssim Re \lesssim 47$	尾流中形成一对稳态旋涡（Föppl涡对），不脱落
$47 \lesssim Re \lesssim 200$	开始周期性涡脱落，层流涡街
$200 \lesssim Re \lesssim 2 \times 10^5$	**亚临界区**，涡街规则，$St \approx 0.19$–0.21 稳定
$2 \times 10^5 \lesssim Re \lesssim 5 \times 10^5$	**临界区**（阻力危机），边界层从前缘转捩为湍流，尾流变窄，涡街不规则
$Re > 5 \times 10^5$	**超临界区**（湍流涡街），St 回升至约 0.27

> **考试常考**：卡门涡街发生的雷诺数范围约 $Re_D > 47$，典型工程范围 $10^2 \sim 10^5$。

9-04-4 斯特劳哈尔数（Strouhal number, St）

定义涡脱落频率 f（从一侧看，每秒脱落的旋涡数）的无量纲参数：

$$St = \frac{fD}{U_\infty}$$

- D 为特征长度（如圆柱直径）；
- U_∞ 为来流速度；
- f 为涡脱落频率（Hz）。

对于圆柱绕流，亚临界区 $St \approx 0.19 \sim 0.21$，工程上常用 $St \approx 0.20$ 做近似估算。即：

$$f \approx \frac{0.2\,U_\infty}{D}$$

9-04-5 卡门涡街的工程危害与控制

有害方面——涡激振动（Vortex-Induced Vibration, VIV）：

- **输电导线"唱歌"**：风吹过导线时涡脱引起高频振动，产生嗡嗡声；
- **烟囱/高耸建筑**：涡脱交变力引起横向振动，严重时导致疲劳破坏；
- **海底管线/立管**：海流引起的涡激振动导致立管疲劳断裂；
- **塔科马海峡大桥坍塌（1940）**：虽然主导机制是颤振（flutter）而非纯涡激振动，但卡门涡街的初期激励被认为是诱发因素之一。

控制措施：

措施	方法
螺旋形扰流板（Helical strakes）	在圆柱外表面加装螺旋形扰流片，破坏涡脱的二维相干性
分流板（Splitter plate）	在圆柱尾流中安装长薄板，抑制交替脱落
扰流棒/引流孔	在钝体表面加装小棒或开孔，破坏规则涡列的形成
Tuned Mass Damper（调谐质量阻尼器）	在烟囱或桥梁中安装吸振装置，抑制涡激振动

有益利用方面：

- **涡街流量计（Vortex flowmeter）**：利用斯特劳哈尔数 St 近似恒定的特点，测量 f 即可反算流速 U_∞ 或流量 Q。这是在工业流程控制中广泛应用的流量计类型。

9-04-6 阻力危机（Drag Crisis）

当 $Re_D \approx 2 \times 10^5$ 时，圆柱的阻力系数 C_D 突然从约 1.2 下降到约 0.3 左右，这一现象称为**阻力危机**。原因：边界层在前缘失稳转捩为湍流，湍流边界层能抵抗更大的逆压梯度，分离点后移，尾流变窄，压差阻力骤降。

典型题型与解题模板

题型一：边界层厚度计算（给定速度分布）

特征：给出层流或湍流边界层的速度分布 $u(y)$（或 $u/U_\infty = f(y/\delta)$），求 δ、δ^*、θ 之一。

模板：

```
1. 明确速度分布公式 u(y) 或 u/U∞ = f(η)，其中 η = y/δ
2. 求 δ* = ∫₀^∞ (1 - u/U∞) dy = δ∫₀¹ (1 - f(η)) dη
3. 求 θ = ∫₀^∞ (u/U∞)(1 - u/U∞) dy = δ∫₀¹ f(η)(1 - f(η)) dη
4. 代入积分结果得到具体值（常考式：δ*/δ = ?, θ/δ = ?）
```

例题：层流边界层 $u/U_\infty = 2(y/\delta) - (y/\delta)^2$，求 δ^*/δ。

解：

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \int_0^1 \left[1 - (2\eta - \eta^2)\right] d\eta = \int_0^1 (1 - 2\eta + \eta^2) d\eta = \left[\eta - \eta^2 + \frac{1}{3}\eta^3\right]_0^1 = 1 - 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

题型二：分离判断

特征：给出速度剖面 $u(y)$ 的测量数据或曲线，判断是否发生分离。

模板：

```
1. 计算 (∂u/∂y)|_{y=0}
2. 若 (∂u/∂y)|_{y=0} = 0：分离点
3. 若 (∂u/∂y)|_{y=0} < 0：已分离（有回流区）
4. 若 (∂u/∂y)|_{y=0} > 0：未分离
```

> 考试变体：给出沿弧面的压强分布 $p(x)$ 或势流速度 $U(x)$，问何处最可能分离——找逆压梯度 $\frac{dp}{dx} > 0$ 且数值够大的区域。

题型三：卡门涡街频率计算

特征：已知圆柱直径 D、来流速度 U_∞，求涡脱落频率 f。

模板：

```
1. 估算 Re = U∞D/ν，确认是否在涡街区域（Re > 47）
2. 若在亚临界区（10² ~ 2×10⁵），取 St ≈ 0.20
3. f = St × U∞ / D
```

例题：风速 10 m/s 吹过直径 0.1 m 的输电线，空气 $\nu = 1.5\times10^{-5}$ m^2/s。求涡脱落频率并判断是否为共振隐患。

解：

$$Re = \frac{10 \times 0.1}{1.5 \times 10^{-5}} = 6.67 \times 10^4 \quad (\text{亚临界区})$$

$$f = \frac{0.20 \times 10}{0.1} = 20\,\text{Hz}$$

若导线固有频率接近 20 Hz，则有共振风险。

易混点与考试提醒

易混点辨析

易混概念	区分关键
δ vs δ^* vs θ	δ是约定性"99%"厚度；δ^*是流量亏损换算的等效位移；θ是动量亏损换算的等效厚度
顺压梯度 vs 逆压梯度	顺压梯度 $dp/dx < 0$ 加速、稳定；逆压梯度 $dp/dx > 0$ 减速、可能导致分离
层流边界层 vs 湍流边界层	层流速度剖面更"瘦"（$H \approx 2.6$），湍流更"胖"（$H \approx 1.4$）；湍流边界层抵抗分离能力更强
摩擦阻力 vs 压差阻力	摩擦阻力来自壁面切应力 τ_w，压差阻力来自前后压强差（与分离直接相关）
卡门涡街频率 vs 结构固有频率	涡街频率 $f = St\,U/D$，流速变化时频率可变；当两者接近时发生共振
亚临界区 vs 超临界区	亚临界区 $St \approx 0.2$ 稳定；超临界区转捩后分离延迟，St 升至约 0.27

常考点

1. **名词解释**：边界层、位移厚度、动量厚度、边界层分离、卡门涡街、斯特劳哈尔数。
2. **简答题**：
   - 边界层分离的条件是什么？
   - 为什么湍流边界层比层流更难分离？
   - 卡门涡街的形成过程。
   - 高尔夫球为什么要做凹坑？
3. **计算题**：
   - 已知速度剖面求 δ^* 和 θ（积分计算）；
   - 利用动量积分关系求壁面切应力；
   - 圆柱绕流的涡脱落频率、阻力系数估算；
   - 三角翼/钝体尾流特征分析。
4. **画图题**：
   - 边界层内速度剖面在分离前后如何变化；
   - 卡门涡街的涡列示意图（两列交错排列）。

考试特别提醒

- **记住层流和湍流边界层的 H 值**：$H = \delta^*/\theta$，层流 ≈ 2.6，湍流 ≈ 1.3–1.4 —— 这是判断边界层流态的重要指标。

- **"逆压梯度必定导致分离"是错的**：分离还需要逆压梯度足够大。边界层在较小的逆压梯度下可能保持附着，只有逆压梯度大到使壁面速度梯度降为零时才会分离。
- **Blasius层流边界层解的** $\delta \propto \sqrt{x}$、$\delta \propto 1/\sqrt{Re_x}$ 常考。
- **卡门涡街的** Re **范围**：$Re_D > 47$ 开始出现，工程关注 $10^2 \sim 2 \times 10^5$ 区间。
- **阻力危机（Drag crisis）**解释：边界层提早转捩→分离延迟→压差阻力骤降。

本章覆盖清单

ID	原始重点	覆盖位置	状态
9-01	边界层定义与形成	§9-01（含 9-01-1 至 9-01-4）	已写
9-02	边界层分离条件与后果	§9-02（含 9-02-1 至 9-02-5）	已写
9-03	三种边界层厚度（δ, δ^*, θ）	§9-03（含 9-03-1 至 9-03-4）	已写
9-04	卡门涡街形成机理	§9-04（含 9-04-1 至 9-04-6）	已写

补充覆盖要点：

- 边界层方程（量级分析与简化）：§9-01-4
- 分离的数学条件 $(\partial u/\partial y)|_{y=0} = 0$：§9-02-2
- 影响分离的因素（流态、粗糙度）：§9-02-3
- 抑制/控制分离的措施（流线型、涡旋发生器、抽吸/吹入等）：§9-02-5
- 形状因子 $H = \delta^*/\theta$：§9-03-4
- 卡门涡街的各 Re 区间特征表：§9-04-3
- 斯特劳哈尔数的物理意义与工程应用（涡街流量计）：§9-04-4，§9-04-5
- 阻力危机概念：§9-04-6
- 典型题解题模板（厚度计算、分离判断、涡频计算）：单独章节
- 易混点/常考点辨析：单独章节

主要参考资料

1. 工程流体力学教材（第9章 绕流流动）
2. Frank M. White. *Fluid Mechanics*, 8th Ed., Chapter 7 – Flow Past Immersed Bodies
3. Fox, McDonald, Pritchard. *Introduction to Fluid Mechanics*, Chapter 9 – Flow Over Bluff Bodies
4. Cengel & Cimbala. *Fluid Mechanics: Fundamentals and Applications*, Chapter 10 – External Flow
5. Schlichting, H. & Gersten, K. *Boundary-Layer Theory*, 8th/9th Ed.
6. Anderson, J. D. *Fundamentals of Aerodynamics*
7. 维基百科/百度百科：边界层、边界层分离、卡门涡街、斯特劳哈尔数
8. 北航/上交大公开课件：边界层理论、绕流流动
9. Theodore von Kármán (1911). “Über den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt”